Eine Zusammenstellung aus Prüfungsprotokollen
bei Professor Weihrauch mit (fast) allen Fragen zur

# Praktische Lernkarten zum Ausschneiden, Zusammenkleben und Sammeln :-) zur Prüfungsvorbereitung Diplomprüfung

# Logik für Informatiker

Thomas Schwarze
Thomas.Schwarze@FernUni-Hagen.de

5. Oktober 2001

Diese Arbeit basiert auf einer Zusammenstellung von Nicole Rauch aus ’95er Prüfungen sowie aktuellen Prüfungsprotokollen und wurde mit dem Textsystem TEX erstellt.

Wie ist die Menge der Aussagensymbole definiert?



Wie ist die Syntax der Aussagenlogik definiert?



Was versteht man unter einer Belegung?



Wie ist die Menge der aussagenlogischen Formeln?



Wie kann die Belegungsfunktion zu einer Auswertungsfunktion für aussagenlogische Formeln erweitert werden?
Was macht man mit einer Belegungsfunktion, um die Semantik einer aussagenlogischen Formel zu definieren?



Wieso kann die Auswertungsfunktion auf diese Weise rekursiv definiert werden?



Wie lautet der Rekursionssatz?



Was liefert $< \sigma > (a \wedge b \vee c)$?

Sei $\Sigma := \{A, 0, (,), \top, \bot, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$ das *Alphabet der Aussagenlogik*

(1) $AS := \{A0^iA \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ Menge der *Aussagensymbole*

(2) Menge $AF \subseteq \Sigma^*$ der *aussagenlogischen Formeln*

- $A0^iA \in AF$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$
- $\{\top, \bot\} \subseteq AF$.
- $\{$"$\neg\alpha$", "$(\alpha \vee \beta)$", "$(\alpha \wedge \beta)$", "$(\alpha \rightarrow \beta)$"$\} \subseteq AF$, falls $\alpha, \beta \in AF$.
- Keine weiteren Elemente gehören zu $AF$.

$AS := \{A0^iA \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ Menge der *Aussagensymbole*

Menge $AF \subseteq \Sigma^*$ der *aussagenlogischen Formeln*

- $A0^iA \in AF$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$
- $\{\top, \bot\} \subseteq AF$.
- $\{$"$\neg\alpha$", "$(\alpha \vee \beta)$", "$(\alpha \wedge \beta)$", "$(\alpha \rightarrow \beta)$"$\} \subseteq AF$, falls $\alpha, \beta \in AF$.
- Keine weiteren Elemente gehören zu $AF$.

Eine *Belegung* der Aussagensymbole ist eine Abbildung $\sigma : AS \longrightarrow \{0, 1\}$. Es sei $BEL := \{0, 1\}^{AS}$ die Menge aller Belegungen.

Mit der Definition geeigneter Funktionen können die aussagenlogischen Formeln mit Hilfe einer Peano-Algebra erzeugt werden. Damit läßt sich der Rekursionssatz anwenden. Die aussagenlogischen Formeln sind eindeutig zerlegbar, damit ist die Existenz der Funktion $h$ des Rekursionssatzes intuitiv klar.

Zu jeder Belegung $\sigma \in BEL$ sei die *Auswertungsfunktion* $<\sigma>: AF \longrightarrow \{0, 1\}$ von den Formeln in die Menge $\{0, 1\}$ der *Wahrheitswerte* rekursiv wie folgt definiert:

$$
\begin{array}{lcl}
<\sigma>(\top) & = & 1 \\
<\sigma>(\bot) & = & 0 \\
<\sigma>(B) & = & \sigma(B) \\
<\sigma>(\text{“}\neg\alpha\text{”}) & = & 1 \text{ gdw. } <\sigma>(\alpha) = 0 \\
<\sigma>(\text{“}(\alpha \vee \beta)\text{”}) & = & 1 \text{ gdw. } <\sigma>(\alpha) = 1 \text{ oder } <\sigma>(\beta) = 1 \\
<\sigma>(\text{“}(\alpha \wedge \beta)\text{”}) & = & 1 \text{ gdw. } <\sigma>(\alpha) = 1 \text{ und } <\sigma>(\beta) = 1 \\
<\sigma>(\text{“}(\alpha \rightarrow \beta)\text{”}) & = & 1 \text{ gdw. } (<\sigma>(\alpha) = 1 \text{ impliziert } <\sigma>(\beta) = 1)
\end{array}
$$

für alle $B \in AS$ und $\alpha, \beta \in AF$.

Der Ausdruck ist nicht definiert, da keine Prioritätenregelung existiert. Man muss klammern.

Es sei $\nu : I \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine Signatur, und es sei $AL = (U, f)$ eine Peano-Algebra der Signatur $\nu$. Es sei $Y \neq \emptyset$ eine Menge, und für jedes $i \in I$ sei

$$h_i : U^{\nu(i)} \times Y^{\nu(i)} \longrightarrow Y$$

eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $h : U \longrightarrow Y$ mit

$$h(f_i(x_1, ..., x_{\nu(i)})) = h_i(x_1, ..., x_{\nu(i)}, h(x_1), ..., h(x_{\nu(i)}))$$

für alle $i \in I$ und $x_1, ..., x_{\nu(i)} \in U$.

Wie ist die Semantik der Aussagenlogik definiert?



Was bedeutet im Rahmen der aussagenlogischen Formeln erfüllbar, was allgemeingültig?



Kann die Allgemeingültigkeit einer aussagenlogischen Formel entschieden/ bewiesen werden?



Ist die Menge der nicht erfüllbaren Formeln entscheidbar?



Welchen Aufwand beansprucht die Entscheidung der Allgemeingültigkeit aussagenlogischer Formeln?



Gibt es schnellere Verfahren zur Entscheidung aussagenlogischer Formeln?



Was heißt NP-vollständig?



Warum kann die Wahrheitstafelmethode angewendet werden, wenn es doch unendlich viele Belegungen gibt?
Die Menge der Belegungen ist ja überabzählbar groß. Wieso kann trotzdem die Erfüllbarkeit getestet werden?

**erfüllbar** :
$\alpha$ heißt *erfüllbar*, gdw. es *eine* Belegung $\sigma \in BEL$ gibt mit $< \sigma > (\alpha) = 1$.
**allgemeingültig** :
$\alpha$ heißt *allgemeingültig* oder auch tautologisch, gdw. $\alpha$ für *alle* Belegungen $\sigma \in BEL$ erfüllbar ist, also $< \sigma > (\alpha) = 1 \quad \forall \sigma \in BEL$ gilt.

Durch die Belegung $\sigma$ und die Auswertungsfunktion $< \sigma >$

Ja, mit der Wahrheitstafelmethode.

Die Allgemeingültigkeit kann mit der Wahrheitstafelmethode entschieden werden.

Wahrscheinlich nicht, da das Erfüllbarkeitsproblem NP-vollständig ist.

Für $n$ Aussagensymbole braucht man $2^n$ Zeilen und es müssen mindestens $(n-1)$ Junktoren aufgrund der Definition der aussagenlogischen Formeln berücksichtigt werden, so dass mindestens $(n-1) \cdot 2^n$ „elementare“ Operationen zu berechnen sind, um die Wahrheitstafel vollständig zu berechnen.

Das **Koinzidenzlemma** besagt, dass der Wert einer Formel nur von der Belegung der in ihr vorkommenden Aussagensymbolen abhängt.
Für alle $\alpha \in AF$ sei $AS(\alpha) \subseteq AS$ die Menge der *in $\alpha$ vorkommenden Aussagensymbole*. Man kann die Funktion $AS$ rekursiv definieren durch:

$$AS(\top) = AS(\bot) = \emptyset,$$
$$AS(B) = \{B\} \text{ für } B \in AS$$
$$AS(\neg\alpha) = AS(\alpha)$$
$$AS(\alpha \vee \beta) := AS(\alpha \wedge \beta) := AS(\alpha \rightarrow \beta) := AS(\alpha) \cup AS(\beta)$$

Es sei $\alpha \in AF$. Ferner seien $\sigma, \sigma' \in BEL$ mit $\sigma(B) = \sigma'(B)$ für alle $B \in AS(\alpha)$.
Dann gilt $< \sigma > (\alpha) =< \sigma' > (\alpha)$.

P ist die Klasse aller Sprachen, die sich in polynomialer Zeit entscheiden lassen. NP ist die Klasse aller Sprachen, für die ein nichtdeterministisches Beweisverfahren mit polynomialer Rechenzeit existiert. Man weiß bis heute nicht, ob P = NP ist, aber man glaubt es nicht. Sollte das Wahrheitstafelproblem in P liegen, so gilt P = NP (da NP-hart).

Wie lautet der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik?
Bei der Erfüllbarkeit von unendlichen Mengen, was machen wir denn da?



Was heißt „endlich erfüllbar“ in der Aussagenlogik?



Was ist eine Erfüllungsmenge?



Was benötigt man für die Prädikatenlogik?



Was ist ein Typ?



Definition der (prädikatenlogischen) Terme.



Wie sind die prädikatenlogischen Formeln definiert?



Was bedeutet „$t$ *frei für* $y$ *in* $\alpha$“?

$X$ heißt *endlich erfüllbar*, gdw. $Y$ erfüllbar ist für jede endliche Teilmenge $Y \subseteq X$.

Es sei $X \subseteq AF$ eine Menge von Formeln und es sei $\alpha \in AF$. Dann gilt:

(1) $Erf(X) = \emptyset$ [a] gdw. $Erf(Y) = \emptyset$ für eine endliche Menge $Y \subseteq X$.

(2) $Erf(X) \neq \emptyset$ gdw. $X$ endlich erfüllbar ist.

(3) $X \models \alpha$ [b] gdw. $Y \models \alpha$ für eine endliche Menge $Y \subseteq X$.

Hinweis: Die erste Definition wird für den Beweis der rekursiven Aufzählbarkeit der allgemeingültigen aussagenlogischen Formeln benötigt.

[a] Erf: Erfüllungsmenge
[b] $\models$: logische Konsequenz, logische Implikation

---

Für die Prädikatenlogik benötigt man ein Alphabet, Variablen, Funktions- und Prädikatsbezeichner. Die Definition lautet:

(1) Die Menge $\Sigma_P := \{x; 0; (; ); ,; \neg; \vee; \wedge; \rightarrow; \forall; \exists; R; f; \top; \bot\}$ ist das *Alphabet der Prädikatenlogik*

(2) $Var := \{x0^n x \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ heißt Menge der *Individuenvariablen*, kurz *Variablen*
$Präd := \{R0^n R0^m R \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ Menge der *Prädikatsbezeichner*.
$Funk := \{f0^n f0^m f \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ Menge der *Funktionsbezeichner*.

(3) $\mu : Präd \cup Funk \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch $\mu(b0^n b0^m b) := m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \{f, R\}$ heißt *Stellenzahlfunktion*, $m = \mu(b0^n b0^m b)$ *Stelligkeit* des (Prädikats-, Funktions-) Bezeichners $b0^n b0^m b$.

$Erf(X) := \{\sigma \in BEL \mid \ <\sigma>(\beta) = 1$ für alle $\beta \in X\}$ heißt *Erfüllungsmenge* von $X$.
Schreibweise: $Erf(\alpha) := Erf(\{\alpha\})$ für $\alpha \in AF$.

---

Es sei $\tau = (I, J)$ ein Typ. Die Menge $Tm_\tau \subseteq \Sigma_P^*$ aller *prädikatenlogischen Terme vom Typ* $\tau$ sei wie folgt als Erzeugnis definiert:

(1) "$y$" $\in TM_\tau$ für alle $y \in Var$.

(2) Für alle $h \in J$ ist "$h(t_1, ..., t_{\mu(h)})$" $\in Tm_\tau$, falls $\{t_1, ..., t_{\mu(h)}\} \subseteq Tm_\tau$.

(3) Keine weiteren Wörter aus $\Sigma_P^*$ sind Elemente von $Tm_\tau$.

Ein *Typ* ist ein Paar $\tau = (I, J)$, wobei $I \subseteq Präd$ und $J \subseteq Funk$.

---

*t frei (zur Substitution) für y in α* bedeutet, dass nur Ersetzungen solcher freien Variablen $y$ in $\alpha$ durch Terme $t$ betrachtet werden, bei denen keine in $t$ vorkommende Variable $z$ in den Wirkungsbereich einer Quantifizierung "$\exists z$" oder "$\forall z$" von $\alpha$ gerät.
Definition:
Es sei $y \in Var$, und es sei $t \in Tm$. Wir definieren eine von $y$ und $t$ abhängige Funktion $G : PF \longrightarrow \{0, 1\}$ rekursiv wie folgt:

$$\begin{array}{lll}
G(\alpha) & = & 1 \text{ für alle } \alpha \in PAT \\
G(\neg\beta) & = & 1 \text{ gdw. } G(\beta) = 1 \\
G((\beta_1 \vee \beta_2)) & = & 1 \text{ gdw. } G(\beta_1) = 1 \text{ und } G(\beta_2) = 1 \\
G((\beta_1 \wedge \beta_2)) & = & 1 \text{ gdw. } G(\beta_1) = 1 \text{ und } G(\beta_2) = 1 \\
G((\beta_1 \rightarrow \beta_2)) & = & 1 \text{ gdw. } G(\beta_1) = 1 \text{ und } G(\beta_2) = 1 \\
G(\forall z\beta) & = & 1 \text{ gdw. } y \neq Fr(\forall z\beta) \text{ oder } (G(\beta) = 1 \text{ und } z \neq Vk(t)) \\
G(\exists z\beta) & = & 1 \text{ gdw. } y \neq Fr(\exists z\beta) \text{ oder } (G(\beta) = 1 \text{ und } z \neq Vk(t))
\end{array}$$
für alle $\beta, \beta_1, \beta_2 \in PF$ und $z \in Var$.

Dann sagen wir: „Der Term $t$ ist *frei für* die Variable $y$ *in* der Formel $\alpha$“, gdw. $G(\alpha) = 1$.

Sei $\tau = (I, J)$ ein Typ.

(1) Die Menge $PAT_\tau := \{$"$Q(t_1, ..., t_{\mu(Q)})$" $\mid Q \in I; t_1, ..., t_{\mu(Q)} \in Tm_\tau\} \cup \{\top, \bot\} \subseteq \Sigma_P^*$ heißt Menge der *(prädikatenlogischen) Primformeln* oder *Atome vom Typ* $\tau$.

(2) Die Menge $PF_\tau \subseteq \Sigma_P^*$ aller *(prädikatenlogischen) Formeln vom Typ* $\tau$ sei wie folgt als Erzeugnis definiert:
- $PAT_\tau \subseteq PF_\tau$.
- "$\neg\alpha$" $\in PF_\tau$, falls $\alpha \in PF_\tau$.
- $\{$"$(\alpha\wedge\beta)$", "$(\alpha\vee\beta)$", "$(\alpha \rightarrow \beta)$"$\} \subseteq PF_\tau$, falls $\{\alpha, \beta\} \subseteq PF_\tau$.
- Für alle $y \in Var$ ist "$\forall y\alpha$" $\in PF_\tau$ und "$\exists y\alpha$" $\in PF_\tau$.
- Keine weiteren Zeichenreihen über $\Sigma_P$ sind Elemente von $PF_\tau$.

Wie ist die Struktur definiert?



Wie ist die (prädikatenlogische) Belegung definiert?



Wie ist die Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe definiert?



Wie ist $W_{\mathcal{S}}(t)(\sigma)$ definiert?
Wie können Terme ausgewertet werden?
Was ist der Wert der Auswertungsfunktion für Terme?



Wie ist $WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma)$ definiert?
(Genaue Definition hinschreiben)
Was ist $WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma)$ für eine Funktion?



Definieren Sie für prädikatenlogische Formeln die Gültigkeit in Strukturen.



Wann ist eine prädikatenlogische Formel gültig?



Was bedeutet $\mathcal{S} \models \alpha(\sigma)$, $\mathcal{S} \models \alpha$, $\models \alpha$?

Sei $\tau$ ein Typ und $\mathcal{S}$ eine $\tau$-Struktur mit Trägermenge $S$.

(1) Eine *Belegung der Variablen über* $\mathcal{S}$ ist eine Abbildung $\sigma : Var \longrightarrow S$.

(2) Für Belegungen $\sigma$ vereinbaren wir die folgende von der Aussagenlogik her gewohnte Schreibweise: Ist $a \in S$ und $x \in Var$, so sei $\sigma[x/a] : Var \longrightarrow S$ definiert durch

$$\sigma[x/a](y) = \begin{cases} a & \text{falls} \quad y = x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $y \in Var$; wir sagen: $\sigma[x/a]$ ist die *Abänderung von $\sigma$ an der Stelle $x$ durch $a$.*

(3) Es sei $Bel_{\mathcal{S}} := \{\sigma \mid \sigma : Var \longrightarrow S\}$ die Menge aller Belegungen der Variablen über $\mathcal{S}$.

Sei $\tau = (I, J)$ ein Typ. Eine *(mathematische) Struktur vom Typ $\tau$*, kurz: eine *$\tau$-Struktur*, ist ein Tripel

$$\mathcal{S} = (S, \mathbf{P}, \mathbf{g}),$$

so dass gilt:

(1) $S$ ist eine nicht leere Menge. $S$ heißt *Träger(menge)* oder *Individuenbereich* von $\mathcal{S}$.

(2) $\mathbf{P}$ ist eine Abbildung, die jedem $R \in I$ eine $\mu(R)$-stellige Relation auf $S$ zuordnet, also $\mathbf{P}(R) =: \mathbf{P}_R \subseteq S^{\mu(R)}$ für alle $R \in I$.

(3) $\mathbf{g}$ ist eine Abbildung, die jedem $f \in J$ eine $\mu(f)$-stellige Funktion $\mathbf{g}(f) =: \mathbf{g}_f : S^{\mu(f)} \longrightarrow S$ zuordnet.

---

Die Abbildung $W_{\mathcal{S}} : Tm \longrightarrow (Bel_{\mathcal{S}} \longrightarrow S)$ sei rekursiv definiert durch

$$W_{\mathcal{S}}(x)(\sigma) = \sigma(x)$$

$$W_{\mathcal{S}}(f(t_1, ..., t_{\mu(f)}))(\sigma) = \mathbf{g}_f(W_{\mathcal{S}}(t_1)(\sigma), ..., W_{\mathcal{S}}(t_{\mu(f)})(\sigma))$$

für alle $x \in Var$, $f \in J$, $t_1, ..., t_{\mu(f)} \in Tm$ und für alle Belegungen $\sigma$ der Variablen über $\mathcal{S}$.
Man nennt $W_{\mathcal{S}}(t)(\sigma)$ den *Wert des Terms $t$ in der Struktur $\mathcal{S}$ unter der Belegung $\sigma$.*

Die Semantik ist immer auf Grundlage einer Struktur und eines Typs definiert. Sei $\tau = (I, J)$ ein Typ und $\mathcal{S} = (S, \mathbf{P}, \mathbf{g})$ eine $\tau$-Struktur.

(1) Die Abbildung $W_{\mathcal{S}} : Tm \longrightarrow (Bel_{\mathcal{S}} \longrightarrow S)$ [a] sei rekursiv definiert durch

Siehe Fragenkarte zu $W_{\mathcal{S}}(t)(\sigma)$

(2) Sei $WW_{\mathcal{S}} : PF \longrightarrow (Bel_{\mathcal{S}} \longrightarrow \{0, 1\})$ durch folgende Rekursionsgleichungen bestimmt:

Siehe Fragenkarte zu $WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma)$

(3) Es sei $\gamma \in PF$ eine Formel und $\sigma \in Bel_{\mathcal{S}}$ eine Belegung. Statt $WW_{\mathcal{S}}(\gamma)(\sigma) = 1$ schreibt man auch $\mathcal{S} \models \gamma(\sigma)$ und sagt: *$\gamma$ gilt in $\mathcal{S}$ unter $\sigma$.* Statt $WW_{\mathcal{S}}(\gamma)(\sigma) = 0$ schreibt man auch $\mathcal{S} \not\models \gamma(\sigma)$ und sagt: *$\gamma$ gilt nicht in $\mathcal{S}$ unter $\sigma$.*

**Besonders wichtig:** Die genaue Abbildungsvorschrift mit der Bildmenge $\longrightarrow (Bel_{\mathcal{S}} \longrightarrow S)$ bzw. $\longrightarrow (Bel_{\mathcal{S}} \longrightarrow \{0, 1\})$ der beiden Funktionen.

[a] $(Bel_{\mathcal{S}} \longrightarrow S) := \{f : Bel_{\mathcal{S}} \longrightarrow S\}$ sei eine Bezeichnung für die Menge aller Funktionen von $Bel_{\mathcal{S}}$ nach $S$.

---

Sei $\alpha \in PF$ und $\mathcal{S}$ eine $\tau$-Struktur.

(1) $\alpha$ heißt *gültig* in der Struktur $\mathcal{S}$, oder $\mathcal{S}$ heißt *Modell* von $\alpha$, in Zeichen: $\mathcal{S} \models \alpha$, gdw. $\mathcal{S} \models \alpha(\sigma)$ für *alle* Belegungen $\sigma \in Bel_{\mathcal{S}}$.

(2) Allgemeingültigkeit liegt vor, gdw. $\alpha$ in allen $\tau$-Strukturen gültig ist.

Sei $WW_{\mathcal{S}} : PF \longrightarrow (Bel_{\mathcal{S}} \longrightarrow \{0, 1\})$ durch folgende Rekursionsgleichungen bestimmt:

$$\begin{array}{lll}
WW_{\mathcal{S}}(\top)(\sigma) & = & 1 \\
WW_{\mathcal{S}}(\bot)(\sigma) & = & 0 \\
\multicolumn{3}{l}{WW_{\mathcal{S}}(R(t_1, .., t_{\mu(R)}))(\sigma) = 1 \text{ gdw. } \mathbf{P}_R(W_{\mathcal{S}}(t_1)(\sigma), ..., W_{\mathcal{S}}(t_{\mu(R)})(\sigma))^1} \\
WW_{\mathcal{S}}(\neg\alpha)(\sigma) & = & 1 \text{ gdw. } WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma) = 0 \\
WW_{\mathcal{S}}(\alpha \wedge \beta)(\sigma) & = & 1 \text{ gdw. } WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma) = 1 \text{ und } WW_{\mathcal{S}}(\beta)(\sigma) = 1 \\
WW_{\mathcal{S}}(\alpha \vee \beta)(\sigma) & = & 1 \text{ gdw. } WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma) = 1 \text{ oder } WW_{\mathcal{S}}(\beta)(\sigma) = 1 \\
WW_{\mathcal{S}}(\alpha \to \beta)(\sigma) & = & 1 \text{ gdw. } WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma) = 1 \text{ impliziert } WW_{\mathcal{S}}(\beta)(\sigma) = 1 \\
WW_{\mathcal{S}}(\forall x\alpha)(\sigma) & = & 1 \text{ gdw. } WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma[x/a]) = 1 \text{ für alle } a \in S \\
WW_{\mathcal{S}}(\exists x\alpha)(\sigma) & = & 1 \text{ gdw. es gibt ein } a \in S \text{ mit } WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma[x/a]) = 1
\end{array}$$

für alle $R \in I$, $t_1, ..., t_{\mu(R)} \in Tm$, $\alpha, \beta \in PF$, $x \in Var$ und $\sigma \in Bel_{\mathcal{S}}$.
Man nennt $WW_{\mathcal{S}}(\gamma)(\sigma)$ den *Wahrheitswert der Formel $\gamma$ in der Struktur $\mathcal{S}$ unter der Belegung $\sigma$.*

$\mathbf{P}_R(s_1, ..., s_{\mu(R)}) := (s_1, ..., s_{\mu(R)}) \in \mathbf{P}_R$

---

$\mathcal{S} \models \alpha(\sigma)$ : Sei $\alpha \in PF$ eine Formel und $\sigma \in Bel_{\mathcal{S}}$ eine Belegung.

$\mathcal{S} \models \alpha(\sigma)$ heißt $\alpha$ gilt in $\mathcal{S}$ unter $\sigma$ und bedeutet $WW_{\mathcal{S}}(\alpha)(\sigma) = 1$.

**Besonders wichtig:** Die Bedeutung ist mit Hilfe der Funktion $WW_{\mathcal{S}}$ auszudrücken!

$\mathcal{S} \models \alpha$ : $\alpha$ heißt gültig in der Struktur $\mathcal{S}$, oder $\mathcal{S}$ heißt Modell von $\alpha$, in Zeichen $\mathcal{S} \models \alpha$, gdw. $\mathcal{S} \models \alpha(\sigma)$ für alle Belegungen $\sigma \in Bel_{\mathcal{S}}$.

$\models \alpha$ : $\alpha$ ist allgemeingültig bzw. $\alpha$ ist die *logische Konsequenz* der leeren Menge $\emptyset \models \alpha$.

Wenn es eine ($\tau$-)Struktur gibt, in der sie gültig ist.

Prädikatenlogik

Wann heißt eine prädikatenlogische Formel erfüllbar?

Prädikatenlogik

Ist die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln rekursiv?

Prädikatenlogik

Wie kann man zeigen, daß die Menge der allgemeingülitgen prädikatenlogischen Formeln nicht rekursiv ist?

Prädikatenlogik

Kann man auch etwas Positives über die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln sagen?

Prädikatenlogik

Was ist eine pränexe Normalform?

Prädikatenlogik

Wie verhält sich eine Formel in Pränexnormalform zur Ausgangsformel?

Prädikatenlogik

Wie funktioniert die Skolemisierung? (an einem Beispiel zeigen)

Prädikatenlogik

Wozu wird die Skolemisierung benötigt? Ist das nicht ein großer Eingriff in die Formel?

Nein, der Beweis erfolgt durch *Reduktion* auf eine bekannte nicht entscheidbare Menge, die ansonsten bei Rekursivität der allgemeingültigen Formeln entschieden werden könnte.

Eine Formel*menge* heißt erfüllbar, wenn sie ein Modell besitzt.
Sei $X \subseteq PF$ und $\alpha \in PF$.

(1) Sei $\mathcal{S}$ eine $\tau$-Struktur. $\mathcal{S}$ heißt *Modell von X*, gdw. $\mathcal{S} \models \beta$ für alle $\beta \in X$. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathcal{S} \models X$.

(2) $X$ heißt *erfüllbar*, gdw. es ein Modell von $X$ gibt. $\alpha \in PF$ heißt erfüllbar, gdw. $\{\alpha\}$ erfüllbar ist.

Ja, sie ist rekursiv-aufzählbar

Durch Reduktion auf das Ableitungsproblem in Semi-Thue-Systemen (STS), die nicht entscheidbare Mengen liefert. Die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik kann auf die Unentscheidbarkeit für STS reduziert werden. Damit ist auch die Prädikatenlogik nicht entscheidbar.

(1) Zu jedem $\alpha \in PF$ existiert ein $\beta \in PF$ in pränexer Normalform mit $\alpha \equiv \beta$. D.h. die Formel in Pränexnormalform ist *logisch äquivalent* [a] zur Ausgangsformel.

(2) Es gibt eine berechenbare Funktion $pn :\subseteq \Sigma_P^* \longrightarrow \Sigma_P^*$, so dass für alle Typen $\tau$ und alle $\alpha \in PF_\tau$ gilt: $pn(\alpha) \in PF_\tau$, $pn(\alpha)$ ist in pränexer Normalform und $\alpha \equiv pn(\alpha)$.

[a] $\alpha$ und $\beta$ sind in allen $\tau$-Strukturen $\mathcal{S}$ äquivalent.

$\alpha \in PF$ heißt in *pränexer Normalform*, gdw.

$$\alpha = \text{“}Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \gamma\text{”}$$

ist mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ für $i = 1, ..., n$, $x_i \in Var$ und ($i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$ für alle $i, j = 1, ..., n$) sowie $\gamma \in QfrPF$. Man nennt $\gamma$ die *Matrix von* $\alpha$.

Die Entscheidbarkeit und Erfüllbarkeit bleibt erhalten, und man kann sich auf die Untersuchung von Herbrand-Modellen beschränken.

Die Skolemisierung eliminiert bei einer *geschlossenen* Formel $\beta$ in pränexer Normalform effektiv die Existenzquantoren, so dass die resultierende Formel dieselben *Erfüllbarkeitseigenschaften* wie $\beta$ hat.

**Beispiel**

$$\beta := \forall x \forall y \exists z P(y, z, x)$$

wird mittels einer berechenbaren Funktion $f \in Funk$ in Abhängigkeit der vor “$\exists z$” stehenden Variablen zu

$$\beta' := \forall x \forall y P(y, f(x, y), x)$$

erfüllbarkeitsäquivalent. $\beta$ und $\beta'$ sind *unterschiedliche* Formeln, die nur *erfüllbarkeitsäquivalent* sind.

Wie verhält sich die skolemisierte Formel zur Ausgangsformel?



Definition des Herbrand-Modells.
Was ist eine Herbrand-Struktur, was ein Herbrand-Universum?



Wie lautet der Satz von Löwenheim-Skolem der Prädikatenlogik und wie kann er bewiesen werden?



Was sind Instanzen (Definition) und wozu dienen sie?



Definition des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik



Beweis der rekursiven Aufzählbarkeit der Menge der allgemeingültigen Formeln?



Bleibt die Allgemeingültigkeit bei der Allquantifizierung erhalten?



Warum wird im Beweis die Nichterfüllbarkeit der negierten Formel ($\neg\alpha$) abgeprüft

**Herbrand-Universum, Herbrand-Struktur**
Sei $\tau = (I, J)$ ein Typ mit $\mu(f) = 0$ für mindestens ein $f \in J$ (mindestens eine Konstante).

(1) Es sei die Menge der *Grundterme* $U_\tau$ von $\tau$ definiert durch

$$U\tau := \{t \in Tm_\tau \mid Vk(t) = \emptyset\}$$

(d.h. $U_\tau$ ist die Menge der Terme, in denen keine Variable vorkommt). $U_\tau$ heißt auch das *Herbrand-Universum* von $\tau$.

(2) Eine *Herbrand-Struktur* über $\tau$ ist eine Struktur $\mathcal{H} = (U_\tau, \mathbf{Q}, \mathbf{h})$, so dass

$$\mathbf{h}_f(t_1, ..., t_{\mu(f)}) = \text{“}f(t_1, ..., t_{\mu(f)})\text{”}$$

für alle $f \in J$ und $t_1, ..., t_{\mu(f)} \in U_\tau$ gilt.

**Herbrand-Modell**
Sei $X \subseteq PF_\tau$. Ein *Herbrand-Modell* von $X$ ist eine Herband-Struktur vom Typ $\tau$, die ein Modell von $X$ ist.

Die beiden Formeln sind erfüllbarkeitsäquivalent (nicht äquivalent!)

---

(1) Sei $\alpha = \forall x_1 \ldots \forall x_n \gamma$ eine geschlossene Formel in Skolemscher Normalform mit $\gamma \in QfrPF$ und $U$ sei das Herbrand-Universum des zugrunde gelegten Typs $\tau$.

$$Inst(\alpha) := \{Sub^{t_1,\ldots,t_n}_{x_1,\ldots,x_n}(\gamma) \mid t_1, ..., t_n \in U\}$$

heißt Menge der *Instanzen von* $\alpha$.

(2) Sei $X$ eine Menge von Aussagen in Skolemscher Normalform. Dann ist

$$Inst(X) := \bigcup\{Inst(\alpha) \mid \alpha \in X\}$$

die Menge der *Instanzen von* $X$.

Eine *Instanz* von $\alpha$ ist eine Spezialisierung von $\alpha$ durch konstante Terme für die Variablen. Eine Formel, die aus der Matrix von $\alpha$ durch Substitution entsteht. Der Vorteil ist, dass sich Instanzen hinsichtlich der Gültigkeit in Strukturen wie aussagenlogische Formeln unter Belegung verhalten. Aufgrund des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik kann das Erfüllbarkeitsproblem durch „aussagenlogische“ Erfüllbarkeit endlicher Konjunktionen gelöst werden.

**Zentraler Satz von Herbrand**
Sei $X$ eine Menge von Aussagen in Skolemscher Normalform. Dann ist $X$ genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Menge von Instanzen von $X$ erfüllbar ist.

**Satz:**
Sei $X \subseteq PF_\tau$ erfüllbar. Dann besitzt $X$ ein Modell mit abzählbar-unendlicher Trägermenge.

**Beweis:**
Da $X$ erfüllbar ist, besitzt $X$ ein Herbrand-Modell. Die Trägermenge, das Herbrand-Universum, ist jedoch abzählbar-unendlich definiert.

---

Sei $\hat{\tau} = (Präd, Funk)$ und sei $\tau = (I, J)$ ein rekursiver Typ (d.h. es seien $I$ und $J$ rekursive Wortmengen). Dann gilt:

(1) $\{\alpha \in PF_{\hat{\tau}} \mid \alpha \text{ allgemeingültig}\}$ ist rekursiv-aufzählbar.
(2) $\{\alpha \in PF_\tau \mid \alpha \text{ allgemeingültig}\}$ ist rekursiv-aufzählbar.

**Beweis von (1)**
Der Beweis erfolgt mit einem Verfahren, welches bei Eingabe eines Wortes $\alpha \in \Sigma^*_P$ hält, falls $\alpha$ eine allgemeingültige Formel ist, und andernfalls nicht hält. Eine geeignete Funktion $\varphi$ läßt sich finden, da $\hat{\tau}$ ein rekursiver Typ ist.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\alpha$ | allgemeingültig | |
| $\iff$ | $\neg\forall\alpha$ | nicht erfüllbar | (Korollar 3.3.18) |
| $\iff$ | $\tilde{\beta} := G(pn(\neg\forall\alpha))$ | nicht erfüllbar | (3.5.2, 3.5.5) |
| $\iff$ | $Inst(\tilde{\beta})$ | nicht erfüllbar | (Satz 3.6.7) |
| $\iff$ | $I^{-1}_\varphi(Inst(\tilde{\beta}))$ | nicht erfüllbar | (nach 3.6.9) |
| $\iff$ | $I^{-1}_\varphi(Inst(\tilde{\beta}))$ | nicht endlich erfüllbar | (Satz 2.4.8) |
| $\iff$ | der obige Algorithmus hält | | |

**Beweis von (2)**
Da $PF_\tau$ eine Teilmenge von $PF_{\hat{\tau}}$ ist bzw. der Durchschnitt der rekursiven Menge $PF_\tau$ mit der rekursiv-aufzählbaren Menge aus Beweis (1), ist $\{\alpha \in PF_\tau \mid \alpha \text{ allgemeingültig}\}$ ebenfalls rekursiv-aufzählbar.

Sei $X \subseteq PF$ und $\alpha \in PF$. Dann gilt:

(1) $X$ erfüllbar $\iff$ $X$ endlich erfüllbar.

(2) $X \models \alpha$ $\iff$ es gibt eine endliche Teilmengemenge $Y \subseteq X$ mit $Y \models \alpha$.

---

Weil dafür ein effektives Verfahren existiert, was den Nachweis auf die Nichterfüllbarkeit der Aussagenlogik reduziert und dort mittels des Kompaktheitssatzes (Satz 2.4.8) in einem endlichen Verfahren der Nachweis abschließend erbracht werden kann.

Ja, weil die Erfüllbarkeitseigenschaften bei geschlossenen Formeln erhalten bleiben und wenn eine Formel allgemeingültig (*in allen $\tau$-Strukturen gültig*) ist, dann auch die allquantifizierte bzw. skolemisierte Formel.

Prädikatenlogik

Wieso wird im Beweis der rekursiven Aufzählbarkeit der Allabschluss gebildet?

Prädikatenlogik

Wieso geht der Übergang von der Prädikatenlogik zur Aussagenlogik?

Prädikatenlogik

Was ist der Zusammenhang zwischen der Prädikatenlogik mit und ohne Gleichheit?

Prädikatenlogik

Wo liegt der genaue Unterschied zwischen der Prädikatenlogik mit und ohne Gleichheit?

Prädikatenlogik

Was ist eine Kongruenzrelation?

Theorie

Was ist eine Theorie?

Theorie

Beispiele einer Theorie!

Theorie

Was heißt „Theorien von Strukturen“?

Der Übergang zur Aussagenlogik ist möglich, da durch die Instanzierung in einer Herbrand-Struktur alle Quantoren und Variablen ersetzt worden sind und somit eine Gleichschaltung der Syntax und Semantik erfolgt.

Weil der Satz über Herbrand-Modelle (Satz 3.6.4) nur für Aussagen in Skolemscher Normalform gilt.

---

Der Unterschied liegt in der *Faktorisierung*. Durch Zusammenfassen der jeweils bezüglich einer Kongruenzrelation $Q$ ununterscheidbaren Elemente einer $\tau$-Struktur $\mathcal{S}$ zu Klassen erhält man eine neue $\tau$-Struktur $\mathcal{S}/Q$, die *Faktorisierung* von $\mathcal{S}$ nach $Q$.

Sei $X \subseteq PF_\tau$ und $\mathcal{S} = (S, \mathbf{P}, \mathbf{g})$ eine $\tau$-Struktur. Dann gilt:

(1) Falls $\mathcal{S}$ ein $(\tau, \doteq)$-Modell [a] von $X$ ist, dann ist $\mathcal{S}$ ein Modell von $X \cup K_\tau$. [b]

(2) Falls $\mathcal{S}$ ein Modell von $X \cup K_\tau$ ist, dann ist $Q := \mathbf{P}_{\doteq}$ eine Kongruenzrelation, und $\mathcal{S}/Q$ ist ein $(\tau, \doteq)$-Modell von $X$.

D.h.: Die $(\tau, \doteq)$-Modelle von $X$ sind die Faktoren der $\tau$-Modelle von $X \cup K_\tau$. Die Faktorisierung liefert die $(\tau, \doteq)$-Struktur. Aus der Kongruenzrelation $\mathbf{P}_{\doteq}$ in $\mathcal{S}$ wird also durch Zusammenfassen jeweils kongruenter Elemente die Gleichheit in der Faktorstruktur $\mathcal{S}/Q$.

[a] $\doteq \in I$ mit $\tau = (I, J)$
[b] siehe Kongruenzrelation

---

Theorien sind Formelmengen, die *widerspruchsfrei* bzw. *konsistent* sind.
Sei $X \subseteq PF$.

(1) $X$ heißt *widerspruchsfrei* oder *konsistent*, gdw. für alle Formeln $\alpha \in PF$ gilt:

nicht $(X \models \alpha$ und $X \models \neg\alpha)$ (d.h. aus $X$ folgt kein Widerspruch).

(2) $X$ heißt *Theorie*, gdw. $X$ widerspruchsfrei ist und für alle $\alpha \in PF$ gilt:

$$X \models \alpha \Longrightarrow \alpha \in X$$

Sei $x_i := x0^i x \in Var$ für $i \in \mathbb{N}$.

(1) Es sei $\ddot{A}q \in PF_\tau$ definiert durch

$$\ddot{A}q := \{\forall x_0\ x_0 \doteq x_0, \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 (x_0 \doteq x_1 \wedge x_0 \doteq x_2 \longrightarrow x_1 \doteq x_2)\}.$$

(2) Für $R \in I$ sei $\alpha(R) \in PF_\tau$ definiert durch

$$\begin{aligned}\alpha(R) \quad := \quad & \text{“}\forall x_1 \ldots \forall x_{2\mu(R)} (x_1 \doteq x_{\mu(R)+1} \wedge \ldots \wedge x_{\mu(R)} \doteq x_{2\mu(R)} \\ & \wedge R(x_1, \ldots, x_{\mu(R)}) \longrightarrow R(x_{\mu(R)+1}, \ldots, x_{2\mu(R)}))\text{”}.\end{aligned}$$

(3) Für $f \in J$ sei $\alpha(f) \in PF_\tau$ definiert durch

$$\begin{aligned}\alpha(f) \quad := \quad & \text{“}\forall x_1 \ldots \forall x_{2\mu(f)} (x_1 \doteq x_{\mu(f)+1} \wedge \ldots \wedge x_{\mu(f)} \doteq x_{2\mu(f)} \\ & \longrightarrow f(x_1, \ldots, x_{\mu(f)}) \doteq f(x_{\mu(f)+1}, \ldots, x_{2\mu(f)}))\text{”}.\end{aligned}$$

(4) Es sei $K_\tau \subseteq PF_\tau$ definiert durch

$$K_\tau \quad := \quad \ddot{A}q \cup \{\alpha(R) \mid R \in I\} \cup \{\alpha(f) \mid f \in J\}.$$

(5) Es sei $\mathcal{S} = (S, \mathbf{P}, \mathbf{g})$ eine $\tau$-Struktur. Die Relation $\mathbf{P}_{\doteq} \subseteq S \times S$ heißt *Kongruenzrelation* in $\mathcal{S}$, gdw. $\mathcal{S}$ ein Modell von $K_\tau$ ist.

---

Die Theorie $Th(\mathcal{S})$ einer $\tau$-Struktur $\mathcal{S}$ ist die Menge aller in $\mathcal{S}$ gültigen Formeln.

(1) Sei $\tau = (\{<, \doteq\}, \{0, 1, +, \cdot\})$ ein Typ mit $\mu(<) = \mu(\doteq) = \mu(+) = \mu(\cdot) = 2$ und $\mu(0) = \mu(1) = 0$. Sei ferner $\mathcal{N}$ die $\tau$-Struktur $(\mathbb{N}, \{(<, <_\mathbb{N}), (\doteq, =_\mathbb{N})\}, \{(0, 0_\mathbb{N}), (1, 1_\mathbb{N}), (+, +_\mathbb{N}), (\cdot, \cdot_\mathbb{N})\})$.

Dann ist

$$Th(\mathcal{N}) := \{\alpha \in PF_\tau \mid \mathcal{N} \models \alpha\}$$

die *Theorie von $\mathcal{N}$*, die auch *Arithmetik* genannt wird.

(2) Sei $\tau = (\{\doteq\}, \{e, \circ\})$ ein Typ mit $\mu(\cdot =) = \mu(\circ) = 2$ und $\mu(e) = 0$. Seien $x, y, z \in Var$ und sei $GA \subseteq PF_\tau$ die Menge bestehend aus folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall z (x \circ y) \circ z \quad &\doteq \quad x \circ (y \circ z) \\ \forall x\ e \circ x \quad &\doteq \quad x \\ \forall x \exists y\ y \circ x \quad &\doteq \quad e\end{aligned}$$

Dei Elemente von $GA$ heißen *Gruppenaxiome*,

$$Gr\ Th := \{\alpha \in PF_\tau \mid GA \models \alpha\}$$

ist die *Gruppentheorie*.

Theorie

Wie lauten die Gruppenaxiome?

Theorie

Wie kann man Theorien erzeugen?

Theorie

Ist die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln eine Theorie?

Theorie

Sind Strukturen durch eine Theorie festzulegen?
Legen Theorien von Strukturen diese eindeutig fest?
Kann man Strukturen durch eine Formelmenge charakterisieren?

Theorie

Wird die Arithmetik (Theorie von $\mathbb{N}$) durch eine Formelmenge charakterisiert?

Theorie

Warum hat „$Th(\mathcal{N}) \cup Y$“ auch ein Modell?

logische Programmierung

Begriff der Unifikation?

logische Programmierung

Was ist ein allgemeinster Unifikator?

- Als Menge der Konsequenzen, z.B.

  Sei $X$ widerspruchsfrei. $Kons(X) := \{\alpha \in PF \mid X \models \alpha\}$

- Durch Angabe einer Struktur und resultierender Konsequenzenmenge.

  Sei $\mathcal{S}$ eine $\tau$-Struktur. $Th(\mathcal{S}) := \{\alpha \in PF \mid \mathcal{S} \models \alpha\}$ (*Theorie von* $\mathcal{S}$)

Sei $\tau = (\{\doteq\}, \{e, \circ\})$ ein Typ mit $\mu(\cdot =) = \mu(\circ) = 2$ und $\mu(e) = 0$. Seien $x, y, z \in Var$ und sei $GA \subseteq PF_\tau$ die Menge bestehend aus folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \forall z (x \circ y) \circ z &\doteq x \circ (y \circ z) \\ \forall x\ e \circ x &\doteq x \\ \forall x \exists y\ y \circ x &\doteq e \end{aligned}$$

Die Elemente von $GA$ heißen *Gruppenaxiome*,

$$Gr\ Th := \{\alpha \in PF_\tau \mid GA \models \alpha\}$$

ist die *Gruppentheorie*.

Nein, Angabe von: *Nicht-Standardmodell der Arithmetik*
Sei $\mathcal{N}$ wie oben. Sei ferner $c$ ein für den Typ $\tau$ von $\mathcal{N}$ neues nullstelliges Funktionszeichen. Sei

$$Y := \{\underbrace{1 + ... + 1}_{n\text{-mal}} < c \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ und}$$

$$X := Th(\mathcal{N}) \cup Y.$$

Offenbar ist jede endliche Teilmenge von $X$ erfüllbar. Nach dem Kompaktheitssatz ist dann auch $X$ erfüllbar. $X$ besitzt nach dem Satz von Löwenheim-Skolem sogar ein Modell $\mathcal{S}$ mit abzählbarem Individuenbereich. In $\mathcal{S}$ sind also alle Formeln wahr, die in $\mathcal{N}$ gelten. Allerdings gibt es in $\mathcal{S}$, da $\mathcal{S}$ Modell von $Y$ ist, auch sogenannte *Nicht-Standard-Elemente*, die „größer“ sind als jede „Standard-Zahl“ $W_\mathcal{S}(1 + ... + 1)(\sigma)$ $(n \in \mathbb{N}; \sigma \in Bel_\mathcal{S})$.
Damit kann die Einschränkung von $\mathcal{S}$ bezüglich $\tau$ nicht isomorph zu $\mathcal{N}$ sein. Man nennt $\mathcal{S}$ ein (abzählbares) *Nicht-Standard-Modell* der Arithmetik $Th(\mathcal{N})$.

Ja, die Menge der Konsequenzen einer widerspruchsfreien Menge ist eine Theorie, und die Menge der allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln ist die Menge der Konsequenzen der leeren Menge (die offensichtlich widerspruchsfrei ist).

Offenbar ist jede endliche Teilmenge von $X$ erfüllbar. Nach dem Kompaktheitssatz ist dann auch $X$ erfüllbar.

Nein, wie das *Nicht-Standard-Modell* der Arithmetik zeigt.

Ein Unifikator $\omega$ von $A$ heißt *allgemeinster Unifikator* von $A$, gdw. es zu jedem Unifikator $\upsilon$ von $A$ eine Spezialisierung $\vartheta$ gibt mit $\upsilon = \vartheta \circ \omega$.

Sei $A \subseteq Tm \cup QfrPF$ eine endliche und nicht leere Menge atomarer Formeln oder Terme eines Typs $\tau$. Eine Spezialisierung [a] $\upsilon$ [b] heißt *Unifikator* von $A$, falls $\upsilon(A)$ einelementig ist. $A$ heißt *unifizierbar*, falls es einen Unifikator von $A$ gibt. Eine Unifikation ist also eine simultane Substitution von paarweise verschiedenen Variablen durch Terme, so dass eine endliche Menge atomarer Formeln in eine einelementige Menge überführt wird.

[a] Eine Spezialisierung ist die simultane Substitution von Variablen durch Terme
[b] $\upsilon$ ist das kleine griechische Ypsilon