Prüfungsprotokoll
Kurs: Wahrscheinlichkeitstheorie I (01262)
Datum: 28.03.2007, 9:30 Uhr, Dauer: ca. 25 min
Prüfer: Dr. Grycko
Beisitzer: J. Horst
Note: 1,0

Nach einem kurzen Gespräch mit den Prüfern (und der Frage, welche Note ich denn in der Klausur gehabt habe (3,3:-)) begann die Prüfung.
Hier die Fragen, die Dr. Grycko gestellt hat zusammen mit Zwischenfragen von ihm sowie kleinen Hinweisen, die ich bei der Beantwortung der Fragen gegeben habe.

Fragen:

- Was ist denn ein Maßraum?
  - Ausgangsraum Ω erklärt
  - $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra, danach kurz erklärt, was eine σ-Algebra ist
  - μ ist ein Maß, also eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{K} \to \overline{\mathbb{R}}$ auf einem beliebigen Mengensystem $\mathcal{K}$
  - Eigenschaften des Maßes (Nichtnegativität, Maß der leeren Menge, σ-Additivität) erläutert, dabei alle Kleinigkeiten erläutert, also Mengenfolge, Summe paarweiser disjunkter Mengen...
- Was ist ein σ-endliches Maß?
  - Existenz einer Mengenfolge $(A_n) \in \mathcal{A}$ für die gilt: $A_n \uparrow \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty$
  - Isoton konvergente Mengenfolge erklärt, also (A_n isoton und Vereinigung der $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$)
- Wo wird denn die σ-Endlichkeit eines Maßes benutzt?
  - 2. Fortsetzungssatz
  - Produktmaß
  - Satz von Radon-Nikodym
- Hmm...nehmen wir mal das Produktmaß. Herr Dr. Grycko schrieb auf: $(\Omega_1 \times \Omega_2, \qquad)$. Auf meine Frage, ob ich den Produktmaßraum ergänzen sollte, nickte Dr. Grycko und ich legte los:
  - Produktmaßraum ist von Interesse für die Frage, ob und wie man von zwei Maßräumen ausgehend ein gemeinsames Maß bestimmen kann, für das eine bestimmte Produkteigenschaft erfüllt ist.
  - $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ aufgeschrieben und alles erklärt
  - Gehe zunächst von $\times_{n=1}^{2} \mathcal{A}_i$ aus, also dem System der messbaren Rechtecke, dieses bildet einen Halbring über $\Omega_1 \times \Omega_2$ und kann als Erzeugendensystem einer σ-Algebra dienen. Kurz erläutert wie man eine σ-Algebra erzeugen kann und wieso dies stets möglich ist (Schnitt von σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra, Potenzmenge ist eine σ-Algebra...).

- $\mu_1 \otimes \mu_2$ ist das Produktmaß der Maße μ_1 und μ_2, dies ist definiert als
$$\mu(V) := (\mu_1 \otimes \mu_2)(V) = \int_{\Omega_1} \mu_2(V_{\omega_1}) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \mu_1(V_{\omega_2}) d\mu_2 \qquad (V \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_2)$$
Dieses Maß ist auf dem System der messbaren Rechtecke ein Maß und kann (σ-endliche Maße!) auf die erzeugte σ-Algebra fortgesetzt werden. Außerdem erfüllt dieses Maß die Eigenschaft
$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \qquad (A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$$

- Ich gebe ihnen zwei Zufallsvariablen X_j $(j = 1, 2)$ mit $X_j : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega_j, \mathcal{A}_j)$, und ich möchte von Ihnen wissen, wie das Produktmaß mit der stoch. Unabhängigkeit zusammenhängt. Vorab, was ist denn überhaupt P?
  - P ist ein W'-Maß, also ein normiertes, nichtnegatives und σ-additives Maß.
  - Definition stoch. Unabhängigkeit:
    X_j sind u.a. $\Leftrightarrow$ $P(\{\omega \in \Omega | X_j(\omega) \in A_j (j \in \{1; 2\})\}) = \prod_{j=1}^{2} P(\{\omega \in \Omega | X_j(\omega)\})$ $(A_j \in \mathcal{A}_j (j \in \{1; 2\})$
  - Sind die X_j u.a. so gilt: $P_{(X_1,X_2)} = \bigotimes_{j=1}^{2} P_{X_j}$
  - Zwischenfrage: Was ist denn $P_{(X_1,X_2)}$ überhaupt?
  - $P_{(X_1,X_2)}$ ist die gemeinsame Verteilung der X_j also die Abbildung $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ mit $\omega \to X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$
  - Zwischenfrage: Ist denn $P_{(X_1,X_2)}$ messbar?
  - Ja, denn die gemeinsame ZV ist genau dann messbar, wenn die ZVen X_j messbar sind, was vorausgesetzt wurde.
  - Das ist noch etwas ungenau, schreiben Sie das mal sauber auf.
  - $P_{(X_1,X_2)}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbar.
  - $P_{(X_1,X_2)}$ ist nun die Verteilung der ZV (X_1, X_2) bzgl. P. Kurz erklärt, was das Bildmaß=Verteilung ist.
  - Habe dann die stoch. Unabhängigkeit mit dem Produktmaß erklärt.

- Nehmen wir jetzt mal nur eine Zufallsvariable X, was ist der Erwartungswert von X?
  - Voraussetzung: $X \in \overline{\mathcal{L}}_q^1(P)$, also X muss quasi-integrierbar sein.
  - Ohne Aufforderung Quasi-Integrierbarkeit erläutert und erwähnt, dass der Erwartungswert dadurch auch den Wert ∞ annehmen kann.
  - $E_P(X) = \int X dP$

- Was ist die Varianz dieser ZV?
  - Voraussetzung: $X \in \overline{\mathcal{L}}^1(P)$ und $(X - E(X)) \in \overline{\mathcal{L}}_q^1(P)$, wobei im Verschiebungssatz klar wird, dass $V(X)$ besser quadratisch integrierbar sein sollte.
  - $V(X) = \int (X - E(X))^2 dP$, also das zweite zentrale Moment der ZVen.
  - Habe dann den Verschiebungssatz erklärt, da ich ihn sowieso schon genannt hatte. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

  - Zwischenfrage: Welcher der beiden Terme ist denn größer?
  - kurz nachgedacht, der erste, denn die Varianz ist stets nichtnegativ.

- Hmmm, könnten Sie den Verschiebungssatz beweisen?
  - Ja. Hab Dr. Grycko dann gesagt, dass man die Klammer mit der binomischen Formel ausrechnet und die Linearität des Erwartungswertes (die sich ja aus der Linearität des Integrals ergibt) ausnutzt, um den Ausdruck umzuformen.

- OK, dann lassen Sie den Beweis, was ist denn die Kovarianz?
  - Voraussetzung: $X, Y \in \overline{\mathcal{L}}^2(P)$
  - Quadratische Integrierbarkeit erklärt
  - $KOV(X,Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$
  - Rechenregeln ergeben sich auf Grund der Tatsache, dass die Kovarianz eine symmetrische Bilinearform darstellt (laut Wikipedia zumindest:-)
  - Zwischenfrage: Wie lautet denn der Verschiebungssatz für die Kovarianz?
  - $KOV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

- Wie lautet die Kovarianzungleichung?
  - $[KOV(X,Y)]^2 \leq V(X) \cdot V(Y)$
  - Diese folgt aus der CSB-Ungleichung.

- Wie lautet denn die CSB-Ungleichung?
  - Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \in \overline{\mathcal{M}}$ dann gilt: $[\int |fg| d\mu]^2 \leq \int f^2 d\mu \cdot \int g^2 d\mu$
  - Zwischenfrage: Wie kommt man nun zur Kovarianzungleichung?
  - Man wählt für $f := (X - E(X))$ und $g := (Y - E(Y))$ und die CSB-Ungleichung liefert die Ungleichung.

- Es gibt ja noch eine Größe, die manchmal im Zusammenhang mit der Kovarianz von Interesse ist, welche ist das?
  - Korrelationskoeffizient definiert.
  - Es gilt zudem: $Kor(X,Y) \leq 1$, dies folgt aus der Kovarianzungleichung.

- Dann schreiben Sie noch bitte die Tschebyscheffsche Ungleichung hin!
  - $P(\{\omega \in \Omega || X(\omega) - E(X)| \geq t\}) \leq \frac{V(|X|)}{t^2}$
  - An dieser Stelle ging es ein wenig hin und her, Dr. Grycko störte sich zunächst an dem t, das ich für $t > 0$ definierte. Er fragte: Gilt das für alle $t > 0$? Ich war der Meinung ja, dann ging diese Frage aber in der Diskussion der Betragstriche in $V(|X|)$ unter (eventuell wollte er hören, dass $t \in \mathbb{R}$ gelten muss, aber zu einer Aufklärung der Frage kam es dann nicht mehr). Ich war der Meinung, dass im Skript/Glossar/Studientagsunterlagen $V(|X|)$ stehen würde, aber naja, die sind ja auch nicht fehlerfrei. Er meinte, ich würde die Ungleichung mit der Markoffschen verwechseln. Daraufhin habe ich gesagt, dass die Betragstriche in der

Markoff-Ungleichung natürlich nötig sind (also in $E(|X|^q)$, in der Varianz eigentlich nicht mehr. Dies reichte dann Dr. Grycko und er beendete die Prüfung. (Ich habe mir nach der Prüfung den Sachverhalt nochmal angeschaut, im Glossar steht tatsächlich $V(|X|)$ während im Skript $V(X)$ steht...)

Ende

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:
Dr. Grycko ist uneingeschränkt als Prüfer zu empfehlen. Er ist sehr nett und prüft auch sehr angenehm. Bei den Antworten, die man aufschreibt, erwartet er aber präzise Formulierungen von Sätzen/Voraussetzungen und insb. den Definitionen von Abbildungen. Der Eindruck aus den übrigen Protokollen, dass ihm die Formulierung von Def.- und Wertebereichen bei Abbildungen sowie die Abbildungsvorschrift sehr wichtig sind, kann ich nur bestätigen. Mir passte das eigentlich ganz gut, da ich mir die Sachverhalte durch das Lernen der Abbildungsvorschriften auch besser merken konnte. Ich hatte den Eindruck, dass er so gut wie gar keine Beweise verlangt, solange man ihm den Eindruck gibt, dass man die Sachen gut verstanden hat. Außerdem kann man sehr frei und ausführlich antworten, so dass ich die Zeit gut füllen konnte. Ich glaube das erwartet er auch, denn oft hatte ich den Eindruck, er würde noch mehr erwarten. Die nächste Frage kam dann meistens erst nach einer kurzen Pause.

Vielen Dank an alle, die nach ihrer Prüfung ein Protokoll geschrieben haben. Ein letzter Tip: Neben der Homepage der Fachschaft gibt es noch einige Protokolle bei der Fachschaft Informatik und den ruf-Homepages.