Prüfungsprotokoll
Kurs: Analysis II (01133)
Datum: 19.06.2007, 8:30 Uhr, Dauer: ca. 30 min
Prüfer: Prof. Dr. Boos
Beisitzer: Dr. Spreng
Note: 1,3

Bei der Anmeldung zur Prüfung fragt Prof. Boos, ob man einen Kurzvortrag von 4 Minuten halten möchte. Ich habe mich für die Konvergenz in metrischen Räumen entschieden.
Kurzvortrag:

- Definition Metrik, kurz erwähnt, dass Metrik auf völlig unstrukturierten Räumen X definiert wird (also noch nicht mal eine Addition auf X u.U. gegeben ist)
- Erzeugung einer Metrik durch Einschränkung von d auf eine Teilmenge von M und Erzeugung durch eine Norm
- Definition Norm (Definition auf einem reellen Vektorraum)
- Definition Umgebung und ε-Umgebung, mit dem Umgebungsbegriff kann ich nun Konvergenz und Punktarten definieren
- Definition konvergente Folge (Hinweis gegeben, dass die Konvergenzkriterien aus Ana I nicht wirklich übertragen werden können, in metrischen Räumen habe ich ja noch nicht einmal eine Addition zur Verfügung)
- Man kann jedoch aus der Definition der Konvergenz leicht das ε-n_0-Kriterium folgern

Hier die Fragen, die Prof. Boos gestellt hat zusammen mit Zwischenfragen von ihm sowie kleinen Hinweisen, die ich bei der Beantwortung der Fragen gegeben habe.

Fragen:

- In Analysis I gilt ja das Cauchykriterium, gilt dies auch in metrischen Räumen?
  - Ja, das Cauchykriterium gilt auch in metrischen Räumen (hab erläutert, dass a im ε-n_0-Kriterium durch x_{k_0} ersetzt wird)
  - konvergente Folge sind Cauchyfolgen (Beweis durch Erweiterung der Metrik, wie in Ana I)
  - Cauchyfolgen sind beschränkt, liegen also in einer abgeschlossenen Kugel und
  - wenn eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge enthält, so ist sie selbst konvergent, ABER...
  - die Äquivalenz zwischen Konvergenz und Cauchykriterium gilt in allg. metrischen Räumen nicht
  - Beispielsweise ist $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ für $d := |\arctan x - \arctan y|$ eine Cauchyfolge aber nicht konvergent.
  - Begriff der Vollständigkeit erläutert

- Wie sehen denn in einem metrischen Raum versehen mit der diskreten Metrik die zusammenhängenden Mengen aus?
  - Die Mengen sind einelementig.
- Warum ist das so?:-)
  - Hatte die Antwort aus einem alten Protokoll und kannte den Beweis überhaupt nicht.
  - Prof. Boos hat dann versucht den Beweis mit mir zu erarbeiten. Er fragte, wie denn die offenen Mengen in diesem Fall aussehen. So kamen wir zur Definition der Topologie, dann zur Frage, wie denn die Vereinigung der offenen Mengen in diskreten Räumen aussehen, wie denn eine ε-Umgebung in einem solchen Raum aussieht. Konnte bei dem Beweis nur auf Stichwörter von Prof. Boos reagieren, also alles was er so sagte erläutern und erklären, die Verbindungen zwischen den genannten Begriffen stellte er her.
- Was kann man denn bei einer punktweise konvergenten Funktionenfolge von einem metrischen in einen metrischen Raum über die Stetigkeit aussagen?
  - Brauchte an dieser Stelle einen Augenblick, um den Themensprung zu verkraften. Die Funktionenfolge muss gleichmäßig konvergieren und fast alle f_k müssen stetig in a sein, damit die Grenzfunktion in a stetig ist.
- Betrachten wir mal die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}^m$ mit $m \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Wie ist die Differenzierbarkeit definiert?
  - Habe zunächst mal ergänzt, dass a ein innerer Punkt von M sein muss.
  - Definition Differenzierbarkeit
  - Kurze Erläuterung: Grenzwert, stetige Fortsetzung
  - Differenzierbarkeit $\Leftrightarrow$ Differenzierbarkeit sämtlicher Komponentenfunktionen
  - Definition partielle Diferenzierbarkeit
  - Habe dann erklärt, dass man die Differenzierbarkeit von f also auf die Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}$ zurückspielen kann.
  - **Zwischenfrage:** Warum nehmen wir a als inneren Punkt und nicht als Häufungspunkt an?
  - Hmm, innerer Punkt heißt ja, dass M Umgebung von a ist...
  - Prof. Boos: Ja, aber das heißt auch, dass a bspw. nicht nur ein Punkt auf einer Geraden seien kann...Wie würde denn dann die Matrix A aussehen?
  - Hmmmmmm...sie enthält wahrscheinlich nur bestimmte Spalten/Zeilen von der gesuchten $f'(a)$?!?
  - Prof. Boos: A enthält dann z.B. eine Zeile, und über die anderen Einträge können Sie nichts sagen, sie ist also nicht mehr eindeutig! (habe auch an dieser Stelle nicht gewusst, worum es ging. In solchen Momenten sich das alles selbst zusammen zu reimen ist eher mühselig, daher habe ich auch an dieser Stelle versucht, so gut es ging alles was von Prof. Boos kam zu erläutern und nach seiner Antwort diese nochmal selbst zu erläutern)
- Gut, wie können Sie denn überprüfen, ob eine Funktion differenzierbar ist?

  - Mit Hilfe der partiellen Ableitungen die Matrix der Gradienten aufstellen und als Matrix A in die Definition einsetzen und die Grenzwertbedingung überprüfen.
  - Partielle Ableitungen existieren für alle Punkte einer Umgebung von a und liefern in a stetige Funktionen
  - Im letzten Fall ist die Äquivalenz gegeben, die andere Richtung (totale⇒partielle Diff.) beweist man einfach mit der Kettenregel und der Diff.-barkeit der Funktion φ_k.

- Wie lautet der Satz über implizite Funktionen?
  - Satz wiedergegeben. Achtung: Prof. Boos verlangte auch die Aussage über die Differenzierbarkeit von $g : U \to V$!

- Der Beweis geht ja ganz einfach :-), wie geht er denn?
  - (man merkte, dass Prof. Boos langsam im sehr guten Bereich prüfte) Habe dann zunächst an den Banachschen Fixpunktsatz gedacht, aber der wird ja im Lokalen Umkehrsatz gebraucht. Habe mich laut daran erinnert, dass ja der Satz über implizite Funktionen leicht aus dem Lokalen Umkehrsatz gefolgert werden kann,...oder war es umgekehrt? Hmmm...
  - Prof. Boos half mir auf die Sprünge, indem er meinte, der lokale Umkehrsatz benötigt ja ein Gleichungssystem vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$. Mir fiel dann ein, dass man den Lokalen Umkehrsatz ja ohne den Satz über die impliziten Funktionen im Kurs beweist, und man den Satz über die impliziten Funktionen verwenden kann, um den Lokalen Umkehrsatz zu beweisen (man betrachtet ein spezielles Gleichungssystem). Andererseits kam der lokale Umkehrsatz auch irgendwo im Beweis des Satzes über implizite Funktionen vor. Meine Antwort war also mehr als holprig;-)

- So, können Sie denn kurz beschreiben, was der Transformationssatz aussagt?
  - Habe den ganzen Satz aufgeschrieben. Dabei kurz Messbarkeit von Mengen, von Funktionen erklärt. $\mathcal{L}$-Integrierbarkeit sollte ich dann nicht mehr erklären.

- Ja, für den Beweis, der ja auch sehr umfangreich ist, haben wir jetzt keine Zeit mehr.

Ende

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:
Prof. Boos ist ein sehr freundlicher Prüfer und uneingeschränkt zu empfehlen. Man muss nur einfach sehen, dass sich die Prüfungen bei ihm nicht exakt gleichen (wie dies bei anderen Prüfern der Fall ist; ich hatte fest damit gerechnet, dass der Beweis über die Extremakriterien drankommen würde) und er seine Fragen an den Prüfling und die Note anpasst (der Beweis zum Satz über implizite Funktionen und die Transformationsformel sind glaube ich eher seltener dran). Mit Beweisskizzen kommt man aber immer gut durch und es wird auch kein exaktes Aufschreiben von Beweisen verlangt, die anderen Sachen, die man aufschreibt, sollten aber schon exakt sein. Schwächen hatte ich in dieser Prüfung an mehreren Stellen und dazu auch gleich richtig dicke. An der Tatsache, dass trotzdem eine 1,3 herausgekommen ist, erkennt man, dass die Benotung wirklich sehr fair ist und man durch gute Kenntnisse in anderen Bereichen die Note wieder retten kann (ich glaube Prof. Boos war fast überrascht, als ich ihm anbot den gesamten Transformationssatz aufzuschreiben:-)