Biholomorphe Äquivalenz spezieller Klassen kompakter Riemannscher Flächen und Hyperflächen

Diplomarbeit

Fernuniversität Hagen

Fachbereich Mathematik und Informatik

Fachrichtung Mathematik

EINLEITUNG

Sei V eine kompakte Riemannsche Fläche und f eine auf V meromorphe Funktion. f definiere eine n-blättrige Überlagerung von V auf $\mathbb{P}^1$. Für jede weitere auf V meromorphe Funktion ℓ gibt es ein irreduzibles Polynom $P_\ell \in \mathbb{C}(f)[T]$ vom Grad $\leq n$, so daß $P_\ell(\ell) = 0$ gilt. Außerdem gibt es ein $h \in Mer(V)$ mit grad $P_h = n$ derart, daß h die Punkte jeder Faser von f trennt (d.h. aus $f(v_1) = f(v_2)$ folgt $h(v_1) \neq h(v_2)$ für $v_1 \neq v_2$) und jedes $\ell \in Mer(V)$ darstellbar ist als $\ell = Q(h)$ mit einem Polynom $Q \in \mathbb{C}(f)[T]$ vom Grad $\leq n-1$. Es gibt zudem kein Polynom aus $\mathbb{C}(f)[T] - \{0\}$ vom Grad $< n$, das von h identisch annulliert wird.

$Mer(V)$ ist eine algebraische Erweiterung vom Grad n über $\mathbb{C}(f)$. Das Polynom P_h kann man darstellen als $P_h = \frac{P}{F}$, wobei P ein irreduzibles Polynom n-ten Grades aus $\mathbb{C}[f][T]$ ist und $F \in \mathbb{C}[f]$ gilt. Das heißt: $Mer(V) = \mathbb{C}(f,h) \cong Quot(\mathbb{C}[T_1,T_2]/(P))$. Die Gleichung $P = 0$ heißt eine definierende Gleichung der kompakten Riemannschen Fläche V. Jeder Automorphismus φ von V induziert einen Körperisomorphismus

$\tilde{\varphi}: \mathrm{Mer}(V) \longrightarrow \mathrm{Mer}(V)$, der bereits durch die alleinige Kenntnis der Werte $\tilde{\varphi}(f)$ und $\tilde{\varphi}(h)$ eindeutig festgelegt ist.

Das die Riemannsche Fläche V definierende Polynom P läßt sich als Polynom in zwei Veränderlichen auffassen. Sei d der Grad dieses Polynoms. Man kann dem Polynom P ein homogenes Polynom P_{hom} in drei Veränderlichen zuordnen:

$$P_{hom}(T_0, T_1, T_2) := T_0^d \, P\left(\frac{T_1}{T_0}, \frac{T_2}{T_0}\right).$$

Dem homogenen Polynom P_{hom} vom Grad d wird die projektiv algebraische Kurve

$$A(P_{hom}) := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid P_{hom}(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

zugeordnet. Diese Kurve kann Singularitäten besitzen, d.h. es kann Punkte $s = (s_0 : s_1 : s_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ geben mit $P_{hom}(s_0, s_1, s_2) = 0$ und

$$\frac{\partial P_{hom}}{\partial T_0}(s) = \frac{\partial P_{hom}}{\partial T_1}(s) = \frac{\partial P_{hom}}{\partial T_2}(s) = 0.$$

Sei $\mathrm{Sing}(P_{hom}) \subset A(P_{hom})$ die Menge der Singularitäten von $A(P_{hom})$. Es gibt eine stetige surjektive Abbildung $\pi: V \longrightarrow A(P_{hom})$, die einen Homöomorphismus $V - \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(P_{hom})) \xrightarrow{\approx} A(P_{hom}) - \mathrm{Sing}(P_{hom})$ induziert. Ist $\pi(v) = (x_0 : x_1 : x_2)$ nicht-singulär und

$(x_0, x_1) \neq (0,0)$ und $(x_0, x_2) \neq (0,0)$, so gilt $f(v) = \frac{x_1}{x_0}$ und $h(v) = \frac{x_2}{x_0}$.

Die obige Konstruktion ist umkehrbar, d.h.: jedem irreduziblen Polynom $P \in \mathbb{C}[T_1, T_2]$ entspricht eine kompakte Riemannsche Fläche X_P. Diese heißt die Riemannsche Fläche von P und hat $P = 0$ als definierende Gleichung.

Sei φ ein Automorphismus von V, der die Ordnung n hat, d.h. $\varphi^n = id_V$ und so, daß die Quotientenfläche V/φ genau $\mathbb{P}^1$ ist. In diesem Fall hat Hurwitz bewiesen, daß die Riemannsche Fläche V eine definierende Gleichung der Form $Y^n = g(X)$ hat, wobei g ein Polynom mit komplexen Koeffizienten ist.

Das Polynom P sei definiert durch $P(T_1, T_2) := g(T_1) - T_2^n$ und P_{hom} sei das zu P homogene Polynom. Es sei $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ ein Punkt mit $y^n = g(x)$, so daß $(1 : x : y)$ kein singulärer Punkt von $A(P_{hom})$ ist. Der Punkt $\pi^{-1}(1 : x : y) \in V$ wird mit (x, y) bezeichnet und die meromorphe Funktion auf V, die dem Punkt $\pi^{-1}(1 : x : y)$ den Wert x (bzw. y) zuordnet, wird ebenfalls mit x (bzw. y) bezeichnet.

Für den Automorphismus φ mit $\varphi^n = id_V$ und ein $(1:x:y) \in A(P_{hom}) - Sing(P_{hom})$ gilt dann: $\varphi(\pi^{-1}(1:x:y)) = \pi^{-1}(1:x:\eta y)$, wobei η eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Für den durch φ induzierten Körperisomorphismus $\tilde{\varphi}: Mer(V) \to Mer(V)$ gilt: $\tilde{\varphi}(x) = x$ und $\tilde{\varphi}(y) = \eta \cdot y$.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der biholomorphen Äquivalenz spezieller Klassen kompakter Riemannscher Flächen V, die eine definierende Gleichung der Form $V: Y^n = f(X)$ mit einem komplexen Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ besitzen.

Für solche kompakten Riemannschen Flächen V besteht die Vermutung, daß sich ihre biholomorphen Äquivalenzklassen mittels der Verzweigungsstellen der meromorphen Funktion $V \ni (x,y) \mapsto x \in \mathbb{P}$ bestimmen lassen.

Drei Klassen kompakter Riemannscher Flächen, bei denen diese Vermutung bestätigt wurde, werden in dieser Arbeit genauer untersucht. Diese gliedert sich dementsprechend in drei Teile.

Teil 1 behandelt den Fall, daß n eine Primzahl ist.

Teil 2 befaßt sich mit dem Fall, daß f ein Polynom vom Primzahlgrad p mit paarweise verschiedenen Nullstellen ist.

In Teil 3 schließlich wird der Fall $V: y^m = (x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)$ mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ untersucht. Das Resultat aus Teil 3 wird sogar auf singularitätenfreie Hyperflächen $H \subset \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ erweitert.

In den ersten beiden Teilen werden zusätzlich Aussagen über die Automorphismengruppen der jeweiligen Riemannschen Flächen gewonnen.

Grundlage der Arbeit sind die Artikel "Equivalence problem and automorphism groups of certain compact Riemann surfaces" von M. Namba (Tsukuba J. Math., Vol. 5, No. 2; 1981; S. 319 – S. 338) sowie "Galoissche dreiblättrige Überlagerungen der Zahlenkugel vom Geschlecht ≥ 3" von A. Duma und W. Radtke (Seminarberichte aus dem Fachbereich Mathematik und Informatik der Fernuniversität Hagen, Nr. 18; 1983; S. 55 – S. 114).

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr. A. Duma für die Betreuung dieser Arbeit.

INHALTSVERZEICHNIS

TEIL 1

Sei p eine Primzahl, $f \in \mathbb{C}[X]$ und $Y^p - f(X)$ sei irreduzibel in $\mathbb{C}[X,Y]$. Das Polynom f werde in der Form

$$(1) \quad f(x) = c(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m}$$

geschrieben, wobei gelte: $c \in \mathbb{C}^*$, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}$ und $\alpha_i \in \mathbb{C}$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

Durch "Manipulationen" an f wird die gleichungsdefinierte kompakte Riemannsche Fläche

$$V: y^p = f(x)$$

bis auf biholomorphe Äquivalenz auf eine möglichst einfache Form gebracht.

Man kann zunächst annehmen, daß $c = 1$ gilt und zudem $k_1 \not\equiv 0 \pmod p, \ldots, k_m \not\equiv 0 \pmod p$.

Ist nämlich O.B.d.A. $k_1 = k_1' \cdot p$, so sind V und die Riemannsche Fläche

$$V_1: y^p = (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m}$$

mittels der birationalen Transformation

$$V \ni (x,y) \xrightarrow{\varphi} \left(x, \frac{y}{\sqrt[p]{c}\cdot(x-\alpha_1)^{k_1'}}\right) \in V_1$$

biholomorph äquivalent. Dabei bezeichne hier und im folgenden $\sqrt[p]{c}$ für $c \in \mathbb{C}^*$ stets eine beliebige, aber fest gewählte der p Wurzeln von c.

φ ist wohldefiniert, denn es gilt für $(x,y) \in V$:

$$\left(\frac{y}{\sqrt[p]{c}\cdot(x-\alpha_1)^{k_1'}}\right)^p = \frac{y^p}{c\cdot(x-\alpha_1)^{k_1'\cdot p}} = \frac{y^p}{c\cdot(x-\alpha_1)^{k_1}}$$

$$= \frac{c(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}}{c(x-\alpha_1)^{k_1}} = (x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m},$$

d.h.: $\varphi(x,y) \in V_1$.

Die Umkehrtransformation zu φ ist gegeben durch

$$V_1 \ni (x,y) \xrightarrow{\psi} (x, \sqrt[p]{c}\cdot(x-\alpha_1)^{k_1'}\cdot y) \in V.$$

Auch ψ ist wohldefiniert wegen $(\sqrt[p]{c}\cdot(x-\alpha_1)^{k_1'}\cdot y)^p = c(x-\alpha_1)^{k_1'\cdot p}\cdot y^p = c(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}$. Schließlich gilt für $(x,y)\in V$: $\psi\circ\varphi(x,y) =$

$$\psi\left(x, \frac{y}{\sqrt[p]{c}\,(x-\alpha_1)^{k_1'}}\right) =$$

$$\left(x, \sqrt[p]{c}\,(x-\alpha_1)^{k_1'} \cdot \frac{y}{\sqrt[p]{c}\,(x-\alpha_1)^{k_1'}}\right) = (x,y)$$

und umgekehrt für $(x,y)\in V_1$: $\varphi\circ\psi(x,y) =$

$$\varphi(x, \sqrt[p]{c}\,(x-\alpha_1)^{k_1'}\cdot y) = \left(x, \frac{\sqrt[p]{c}\,(x-\alpha_1)^{k_1'}\cdot y}{\sqrt[p]{c}\,(x-\alpha_1)^{k_1'}}\right)$$

$= (x,y)$. V und V_1 sind also biholomorph äquivalent. Es gelte also $c=1$ und $k_1 \not\equiv 0 \pmod p, \dots, k_m \not\equiv 0 \pmod p$.

BEMERKUNG: Bei allen folgenden Biholomorphie-nachweisen, bei denen die Umkehrtransformation nicht explizit angegeben wird, wird stets ohne nochmalige Bezugnahme folgender Satz benutzt.

SATZ: [s. Forster O. [1]; Satz 8.5, S. 48]
Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen und $\pi: Y\to X$, $\tau: Z\to X$ eigentliche holomorphe Überlagerungen. $A\subset X$ sei abgeschlossen und diskret, $X' := X - A$, $Y' := \pi^{-1}(X')$

und $Z' := \tau^{-1}(X')$. Dann kann jede spurtreue biholomorphe Abbildung $\eta : Y' \to Z'$ zu einer spurtreuen biholomorphen Abbildung $\eta : Y \to Z$ fortgesetzt werden. □

Bei allen Transformationen, die im folgenden auf Biholomorphie untersucht werden, sind die Bedingungen des Satzes trivialerweise erfüllt. Biholomorphienachweise werden sich also im folgenden lediglich auf den Nachweis der Wohldefiniertheit der zu untersuchenden Transformation beschränken. □

Es seien nun $j_1, \dots, j_m$ ganze Zahlen mit $k_1 \equiv j_1 \pmod p, \dots, k_m \equiv j_m \pmod p$.

Die Riemannschen Flächen V und

$$V' : y^p = (x-\alpha_1)^{j_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{j_m}$$

sind dann biholomorph äquivalent.

Aus $k_i \equiv j_i \pmod p$ folgt die Existenz von ganzen Zahlen s_i mit $k_i - j_i = s_i p$.
Die Transformation

$$V \ni (x,y) \overset{\varphi}{\longmapsto} (x, y(x-\alpha_1)^{-s_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{-s_m}) \in V'$$

erweist sich als biholomorph. Für $(x,y) \in V$

gilt: $(y(x-\alpha_1)^{-s_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{-s_m})^p =$
$(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m} \cdot (x-\alpha_1)^{-s_1 p} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{-s_m p}$
$= (x-\alpha_1)^{j_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{j_m}$. Somit ist also φ wohldefiniert. Es ist trivial nachzuweisen, daß die Transformation

$$V' \ni (x,y) \overset{\psi}{\longmapsto} (x, y(x-\alpha_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{s_m}) \in V$$

die Umkehrtransformation zu φ ist. V und V' sind also biholomorph äquivalent.

In der Darstellung (1) von f können nun zwei Fälle eintreten:

(i): $\sum_{i=1}^{m} k_i \equiv 0 \pmod p$ oder

(ii): $\sum_{i=1}^{m} k_i \not\equiv 0 \pmod p$

Es gelte zunächst der Fall (i):

Dann ist die kanonische meromorphe Projektion $x: V \to \mathbb{P}^1$; $(x,y) \mapsto x$ über ∞ nicht verzweigt.

x ist eine p-blättrige Überlagerung der Zahlenkugel mit den möglichen kritischen Werten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und ∞. Sei nun U_j

eine offene Kreisscheibe um α_j, die keinen weiteren kritischen Wert von x enthält.

Die komplexe Funktion $g(x) := \prod_{\substack{s=1 \\ (s \neq j)}}^{m} (x - \alpha_s)^{k_s}$

ist nullstellenfrei in U_j. Wegen des einfachen Zusammenhangs von U_j existiert also eine holomorphe Funktion $h: U_j \to \mathbb{C}$ mit $h^p = g$. In U_j gilt also:

$$f(x) = (x - \alpha_j)^{k_j} \cdot (h(x))^p .$$

Analytische Fortsetzung eines Zweiges von $\sqrt[p]{(x-\alpha_j)^{k_j}}$ längs einer in U_j gelegenen Kreislinie mit Mittelpunkt α_j liefert wegen $k_j \not\equiv 0 \pmod p$ nach genau p Umläufen zum ersten Mal wieder diesen Zweig, so daß also über α_j bzgl. x genau ein Punkt P_j der Riemannschen Fläche V liegt.

Die Verzweigungsordnung von x in diesen Punkten P_j ist also gleich $p-1$, weil p prim ist.

Sei nun $r > \sup\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_m|\}$ und $U' := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| > r\}$. In $U := U' \cup \{\infty\}$ gilt:

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m} =$$

$$x^{k_1+\cdots+k_m} \cdot \frac{(x-\alpha_1)^{k_1}}{x^{k_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{(x-\alpha_m)^{k_m}}{x^{k_m}} =$$

$$x^{k_1+\cdots+k_m}\left(1-\frac{\alpha_1}{x}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{\alpha_m}{x}\right)^{k_m}.$$

Die Funktion $F(x) := \left(1-\frac{\alpha_1}{x}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{\alpha_m}{x}\right)^{k_m}$ ist in U null- und polstellenfrei. Also ist in einer gewissen offenen Kreisscheibe U_0 mit Mittelpunkt 0 die holomorphe Funktion $\frac{1}{F}$ nullstellenfrei. Wegen des einfachen Zusammenhangs von U_0 gibt es dann eine holomorphe Funktion $h : U_0 \to \mathbb{C}$ mit $h^p = \frac{1}{F}$. Auf $U_0 - \{0\}$ gilt also $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^{k_1+\cdots+k_m}} \cdot (h(x))^p$.

Wegen $k_1 + \cdots + k_m = sp$ für ein $s \in \mathbb{Z}$, liefert analytische Fortsetzung eines Zweiges von

$$\sqrt[p]{\frac{1}{x^{k_1+\cdots+k_m}}} = \sqrt[p]{\frac{1}{x^{sp}}}$$

längs einer in U_0 gelegenen Kreislinie mit Mittelpunkt 0 bereits nach einmaligem Umlauf wieder diesen Zweig. Über ∞ liegen bzgl. der Überlagerung x also p

verschiedene Punkte der Riemannschen Fläche V. Die Verzweigungsordnung von x in diesen Punkten ist also gleich Null. Somit ist die Gesamtverzweigungsordnung b von x gleich $m \cdot (p-1)$. x ist eine p-blättrige Überlagerung von $\mathbb{P}^1$. Nach der Formel von Riemann – Hurwitz für Überlagerungen der Zahlenkugel [s. Forster O. [1]; S. 128] gilt dann im Fall (i) für das Geschlecht g von V:

$$g = \frac{b}{2} - p + 1 = \frac{m(p-1)}{2} - p + 1 = \frac{(p-1)(m-2)}{2}$$

Es gelte nun der Fall (ii):

Wörtlich wie in Fall (i) folgt, daß bzgl. x über den Punkten α_j genau ein Punkt P_j der Riemannschen Fläche V liegt. Die Verzweigungsordnung von x in diesen m Punkten ist also wieder gleich $p-1$. Ebenfalls wörtlich wie in Fall (i) folgt die Existenz einer auf einer Kreisscheibe U_0 mit Mittelpunkt 0 definierten holomorphen nullstellenfreien Funktion h, so daß auf $U_0 - \{0\}$ gilt:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^{k_1 + \cdots + k_m}} \cdot (h(x))^p .$$

Nun ist aber p kein Teiler von $k_1 + \cdots + k_m$.

Somit liefert analytische Fortsetzung eines Zweiges von $\sqrt[p]{\frac{1}{x^{k_1+\cdots+k_m}}}$ längs einer in U_0 gelegenen Kreislinie mit Mittelpunkt 0 erst nach genau p Umläufen wieder zum ersten Mal diesen Zweig. Mithin liegt bzgl. x über ∞ genau ein Punkt P_∞ der Riemannschen Fläche V und x besitzt in P_∞ die Verzweigungsordnung $p-1$. Die Gesamtverzweigungsordnung b von x ergibt sich also im Fall (ii) zu $(m+1)(p-1)$. Für das Geschlecht g von V gilt dann nach der Formel von Riemann-Hurwitz:

$$g = \frac{b}{2} - p + 1 = \frac{(m+1)(p-1)}{2} - (p-1) = \frac{(m-1)(p-1)}{2}$$

Der Riemannschen Fläche V wird nun im Fall (i) der Divisor

$$D := k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m) \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1)$$

zugeordnet und im Fall (ii) der Divisor

$$D := k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m) + k_{m+1}(\infty) \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1),$$

wobei die Zahl k_{m+1} so zu wählen ist, daß $k_1 + \cdots + k_m + k_{m+1} \equiv 0 \pmod p$ gilt.

k_{m+1} ist dann bis auf ganzzahlige Vielfache von p eindeutig bestimmt.

Die obige Divisorenschreibweise ist so zu verstehen, daß den Punkten α_i bzw. ∞ die Zahlen k_i bzw. k_{m+1} zugeordnet werden und allen sonstigen $\beta \in \mathbb{P}^1$ die Zahl 0.

Den Riemannschen Flächen V sind hiermit aber nicht nur Divisoren auf $\mathbb{P}^1$ zugeordnet worden, sondern man kann umgekehrt aus diesen Divisoren $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1)$ die Riemannschen Flächen V zurückgewinnen.

Ist nämlich D gegeben durch $D = k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m)$ mit paarweise verschiedenen $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und $k_1 + \cdots + k_m \equiv 0 \pmod p$, so ist die zugehörige Riemannsche Fläche V ersichtlich gegeben durch

$$V:\ y^p = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m}.$$

Analoges gilt für $D = k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m) + k_{m+1}(\infty)$ mit $k_1 + \cdots + k_m + k_{m+1} \equiv 0 \pmod p$.

Es besteht also eine bijektive Beziehung zwischen den Riemannschen Flächen V, die einen Automorphismus h der Ordnung p besitzen, so daß $V/h \approx \mathbb{P}^1$ gilt, und den

Divisoren $D = k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m) + k_{m+1}(\infty) \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1)$, wobei $1 \leq k_i < p$ für $i = 1, \ldots, m$; $0 \leq k_{m+1} < p$ und $k_1 + \cdots + k_m + k_{m+1} \equiv 0 \pmod p$ gilt.

Auf Grund dieser Identifizierungsmöglichkeit wird im folgenden auch häufig $V = V(D)$ geschrieben.

Sei nun $m \geq 2$ eine fest gewählte natürliche Zahl und

$$\Omega := \{ D = k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m) \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1) \mid \alpha_j \in \mathbb{P}^1; \alpha_i \neq \alpha_j \text{ für } i \neq j; k_j \not\equiv 0 \pmod p \text{ und } k_1 + \cdots + k_m \equiv 0 \pmod p \}$$

In der Definition von Ω ist $\alpha_j = \infty$ für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ ausdrücklich zugelassen.

Auf der Menge Ω wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ eingeführt durch

$$k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m) \sim j_1(\alpha_1) + \cdots + j_m(\alpha_m)$$
$$:\Longleftrightarrow k_1 \equiv j_1 \pmod p, \ldots, k_m \equiv j_m \pmod p.$$

Der Nachweis, daß $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf Ω definiert, ist trivial.

Sei $[D]$ die Äquivalenzklasse von $D \in \Omega$, $\Gamma := \Omega/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : \Omega \to \Gamma$; $D \mapsto [D]$ die kanonische Projektion.

Es wurde bereits gezeigt, daß aus $D \sim D'$ die biholomorphe Äquivalenz der Riemannschen Flächen $V(D)$ und $V(D')$ folgt.

Bis auf biholomorphe Äquivalenz kann man also für $D \in \Omega$ die Riemannsche Fläche $V([D])$ definieren, die, um die Notation nicht überzustrapazieren, ebenfalls mit $V(D)$ bezeichnet wird. Mißverständnisse entstehen nicht. Häufig wird anstatt $[D]$ auch nur D geschrieben.

Zielsetzung ist nun zu erkennen, wann die Riemannschen Flächen $V(D)$ und $V(D')$ biholomorph äquivalent sind.

Da p eine Primzahl ist, ist $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) - \{\hat{0}\}$ eine multiplikative Gruppe. Sofern keine Mißverständnisse entstehen, werden für $r \in \mathbb{Z}$ die Restklassen $\hat{r} := r + p\mathbb{Z}$ ebenfalls mit r bezeichnet.

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ operiert auf dem Klassenraum $\Gamma = \Omega/\sim$ mittels der folgenden Abbildung:

$$(r, [D]) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times \Gamma \overset{\varphi}{\mapsto} [rD] \in \Gamma .$$

Hierbei bezeichne $[rD]$ die folgende Äquivalenzklasse: Ist $D = k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m)$ ein

Repräsentant von $[D]$ und $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, so sei $[rD]$ die Äquivalenzklasse von $rk_1(\alpha_1)+\dots+rk_m(\alpha_m)$ $\in \Omega$.

Es muß gezeigt werden, daß diese Definition sinnvoll ist. Dazu ist zu zeigen:

1.) Sind $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{r} = \hat{s}$ und $D = k_1(\alpha_1)+\dots+k_m(\alpha_m)$, $D' = j_1(\alpha_1)+\dots+j_m(\alpha_m)$ Repräsentanten von $[D] \in \Gamma$, so gilt $[rk_1(\alpha_1)+\dots+rk_m(\alpha_m)] = [sj_1(\alpha_1)+\dots+sj_m(\alpha_m)]$

2.) Für $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ und $k_1(\alpha_1)+\dots+k_m(\alpha_m) \in \Omega$ ist $rk_1(\alpha_1)+\dots+rk_m(\alpha_m) \in \Omega$.

<u>zu 1.)</u> Wegen $D \sim D'$ gilt $k_1 \equiv j_1 \pmod p, \dots, k_m \equiv j_m \pmod p$. Aus $\hat{r} = \hat{s}$ folgt $r - s \in p\mathbb{Z}$, d.h.: $r = s + pt$ für ein $t \in \mathbb{Z}$. Für $i = 1, \dots, m$ gilt somit $rk_i - sj_i = sk_i + ptk_i - sj_i = s(k_i - j_i) + ptk_i$. Da $k_i \equiv j_i \pmod p$ gilt, folgt hieraus: $rk_i \equiv sj_i \pmod p$, d.h.: $rk_1(\alpha_1)+\dots+rk_m(\alpha_m) \sim sj_1(\alpha_1)+\dots+sj_m(\alpha_m)$

<u>zu 2.)</u> Zunächst gilt $rk_i \not\equiv 0 \pmod p$ für $i = 1, \dots, m$. Wäre dies nicht der Fall, also $rk_i \equiv 0 \pmod p$ für ein i, so wäre wegen $k_i \not\equiv 0 \pmod p$ p ein Teiler von r, d.h.: $r = 0$. Widerspruch zu $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Schließlich gilt wegen $k_1 + \dots + k_m \equiv 0 \pmod p$

auch $rk_1 + \dots + rk_m \equiv 0 \pmod p$.

Die Definition von $[rD]$ ist also sinnvoll.

Daß mittels der Abbildung φ eine Operation auf Γ definiert wird, ist leicht einzusehen: $[1 \cdot D] = [D]$ ist klar und für $r, s \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ und $[D] \in \Gamma$ gilt $r(s[D]) = r([sD]) = [rsD] = (rs)[D]$.

Anstatt $[rD]$ wird im folgenden kurz rD geschrieben. Auch dies wird zu keinen Mißverständnissen führen. Es gilt nun:

<u>BEMERKUNG 1.1.:</u> Sei $D \in \Gamma$ und $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Dann sind die Riemannschen Flächen $V(D)$ und $V(rD)$ biholomorph äquivalent.

<u>BEWEIS:</u> Sei $\varphi : V(D) \longrightarrow V(rD)$ definiert durch $\varphi(x,y) := (x, y^r)$. Daß die holomorphe Abbildung φ wohldefiniert ist, ist klar. Wegen der Kompaktheit von $V(D)$ und der Nichtkonstanz von φ ist φ surjektiv. Die Injektivität von φ ist nicht unmittelbar einzusehen.
Seien $(x,y), (x',y') \in V(D)$ mit $(x,y^r) = (x', y'^r$
Dann gilt $x = x'$ und $y^r = y'^r$. Sei $s \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
das Inverse zu $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Es ist also $rs = 1 + pq$ für ein $q \in \mathbb{Z}$. Mithin folgt $y^{rs} = y'^{rs}$ $\Leftrightarrow y y^{pq} = y' y'^{pq}$. Wegen $x = x'$ und $y^r = y$

erhält man, je nachdem, ob D dem Punkt ∞ den Wert 0 zuweist oder nicht: $y((x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_t)^{k_t})^q$ $= y'((x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_t)^{k_t})^q$ für ein $t\in\{m-1,m\}$. Hieraus folgt $y=y'$. φ ist also auch injektiv. Also ist φ biholomorph und Bemerkung 1.1. somit bewiesen. $\square$

Sei $Aut(\mathbb{P}^1)=\{f:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1 \mid f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ \det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\neq 0\}$

die Automorphismengruppe der Zahlenkugel.

Auch $Aut(\mathbb{P}^1)$ operiert auf Γ wie folgt:

$Aut(\mathbb{P}^1)\times\Gamma\ni(B,[D])\xmapsto{\lambda} B(D):=$ $[k_1B(\alpha_1)+\cdots+k_mB(\alpha_m)]\in\Gamma$, wobei $[D]=[k_1(\alpha_1)+\cdots+k_m(\alpha_m)]$ gelte.

Die Wohldefiniertheit von λ ist trivial. Zu den Operationseigenschaften:
$id([D])=[D]$ ist klar, und für $A,B\in Aut(\mathbb{P}^1)$ und $[D]=[k_1(\alpha_1)+\cdots+k_m(\alpha_m)]\in\Gamma$ gilt:
$A(B(D))=A([k_1B(\alpha_1)+\cdots+k_mB(\alpha_m)])=$
$[k_1(A\circ B)(\alpha_1)+\cdots+k_m(A\circ B)(\alpha_m)]=$
$(A\circ B)([k_1(\alpha_1)+\cdots+k_m(\alpha_m)])=(A\circ B)(D)$.

Es gilt nun:

<u>BEMERKUNG 1.2.:</u> Sei $B\in Aut(\mathbb{P}^1)$ und $D\in\Gamma$. Dann sind die Riemannschen Flächen $V(D)$ und

$V(B(D))$ biholomorph äquivalent.

BEWEIS: Sei $D = k_1(\alpha_1) + \dots + k_m(\alpha_m)$ und $B \in Aut(\mathbb{P}$

sei gegeben durch $B(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

NOTIZ 1.1.: Für $x \in \mathbb{P}^1$ gilt

$$(B(x) - B(\alpha_1))^{k_1} \cdot \dots \cdot (B(x) - B(\alpha_m))^{k_m} =$$

$$\frac{(ad-bc)^{\sum_{i=1}^m k_i}}{\prod_{i=1}^m (c\alpha_i + d)^{k_i}} \cdot \prod_{i=1}^m \left(\frac{x - \alpha_i}{cx+d}\right)^{k_i}.$$

BEWEIS: (von Notiz 1.1.)

$$(B(x) - B(\alpha_1))^{k_1} \cdot \dots \cdot (B(x) - B(\alpha_m))^{k_m} =$$

$$\prod_{i=1}^m \left(\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a\alpha_i + b}{c\alpha_i + d}\right)^{k_i} =$$

$$\prod_{i=1}^m \left(\frac{(ax+b)(c\alpha_i + d) - (cx+d)(a\alpha_i + b)}{(cx+d)(c\alpha_i + d)}\right)^{k_i} =$$

$$\prod_{i=1}^m \left(\frac{axc\alpha_i + bc\alpha_i + axd + bd - cxa\alpha_i - da\alpha_i - cxb - bd}{(cx+d)(c\alpha_i + d)}\right)^{k_i} =$$

$$\prod_{i=1}^m \left(\frac{(ad-cb)x + (bc-ad)\alpha_i}{(cx+d)(c\alpha_i+d)}\right)^{k_i} = \prod_{i=1}^m \left(\frac{(ad-bc)(x-\alpha_i)}{(cx+d)(c\alpha_i+d)}\right)^{k_i} =$$

$$\frac{(ad-bc)^{\sum_{i=1}^m k_i}}{\prod_{i=1}^m (c\alpha_i+d)^{k_i}} \cdot \prod_{i=1}^m \left(\frac{x-\alpha_i}{cx+d}\right)^{k_i}. \quad \square$$

Um zu zeigen, daß $V(D)$ und $V(B(D))$ biholomorph äquivalent sind, werden vier Fälle unterschieden.

<u>Fall 1:</u> $\alpha_i \neq \infty$, $B(\alpha_i) \neq \infty$ für $i = 1, \dots, m$.

Die Riemannschen Flächen $V(D)$ und $V(B(D))$ sind dann gegeben durch

$$V(D): y^p = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m} \quad \text{und}$$

$$V(B(D)): y^p = (x-B(\alpha_1))^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-B(\alpha_m))^{k_m}$$

<u>Fall 1-a):</u> $c = 0$, d.h.: $B(\infty) = \infty$

Notiz 1.1. schrumpft dann zusammen zu

$$(B(x)-B(\alpha_1))^{k_1} \cdot \ldots \cdot (B(x)-B(\alpha_m))^{k_m} =$$

$$\frac{(ad)^{\sum_{i=1}^m k_i}}{d^{\sum_{i=1}^m k_i}} \cdot \prod_{i=1}^m \frac{(x-\alpha_i)^{k_i}}{d^{k_i}} = \left(\frac{a}{d}\right)^{\sum_{i=1}^m k_i} \cdot \prod_{i=1}^m (x-\alpha_i)^{k_i}.$$

Die Transformation

$$\psi_B : V(D) \to V(B(D)); \; (x,y) \mapsto \left(B(x), \left(\frac{a}{d}\right)^{(\sum_{i=1}^m k_i)/p} \cdot y\right)$$

erweist sich als biholomorph. Es genügt, die Wohldefiniertheit von ψ_B zu zeigen. Für $(x,y) \in V(D)$ gilt:

$$\left(\left(\frac{a}{d}\right)^{(\sum_{i=1}^m k_i)/p} \cdot y\right)^p = \left(\frac{a}{d}\right)^{\sum_{i=1}^m k_i} \cdot \prod_{i=1}^m (x-\alpha_i)^{k_i} \overset{[\text{Notiz1.}}{=}$$

$$(B(x) - B(\alpha_1))^{k_1} \cdot \ldots \cdot (B(x) - B(\alpha_m))^{k_m}.$$

ψ_B ist also wohldefiniert. Damit ist Fall 1–a) erledigt.

<u>Fall 1–b):</u> $c \neq 0$, d. h.: $B^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \in \mathbb{C}$.

Sei
$$s := \frac{\sqrt[p]{\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{ad-bc}{c\alpha_i + d}\right)^{k_i}}}{c^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)/p}}.$$

Es ist $s \neq 0$ wegen $ad - bc \neq 0$ und $s \neq \infty$ wegen $B(\alpha_i) \in \mathbb{C}$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Die Transformation $\psi_B : V(D) \longrightarrow V(B(D))$;

$$(x, y) \longmapsto \left(B(x), \frac{sy}{(x - B^{-1}(\infty))^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)/p}} \right)$$

ist biholomorph. Es genügt, die Wohldefiniertheit von ψ_B zu zeigen. Für $(x, y) \in V(D)$ gilt:

$$\left(\frac{sy}{(x - B^{-1}(\infty))^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)/p}} \right)^p =$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{ad-bc}{c\alpha_i + d}\right)^{k_i}}{c^{\sum_{i=1}^{m} k_i}} \cdot \frac{(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_m)^{k_m}}{(x - B^{-1}(\infty))^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)}} \quad \overset{[B^{-1}(\infty) = -}{=}$$

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{ad-bc}{c\alpha_i+d}\right)^{k_i}\cdot\frac{(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}}{(cx+d)^{\sum_{i=1}^{m}k_i}} \quad \underset{=}{[\text{Notiz } 1.1.]}$$

$$(B(x)-B(\alpha_1))^{k_1}\cdot\ldots\cdot(B(x)-B(\alpha_m))^{k_m}.$$

ψ_B ist also wohldefiniert. Damit ist auch Fall 1-b) erledigt.

<u>Fall 2:</u> $B(\alpha_i)=\infty$ für ein $i\in\{1,\ldots,m\}$ und $\alpha_i\in\mathbb{C}$ für alle $i\in\{1,\ldots,m\}$.

O.B.d.A. sei $B(\alpha_1)=\infty$. Es ist dann $\alpha_1=-\frac{d}{c}\in\mathbb{C}$, d.h.: $c\neq 0$. Die Riemannschen Flächen $V(D)$ und $V(B(D))$ sind gegeben durch

$V(D)$: $y^p=(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}$ und

$V(B(D))$: $y^p=(x-B(\alpha_2))^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-B(\alpha_m))^{k_m}$.

Sei $$s:=\frac{\sqrt[p]{\prod_{i=2}^{m}\left(\frac{ad-bc}{c\alpha_i+d}\right)^{k_i}}\cdot\sqrt[p]{c^{k_1}}}{c^{(\sum_{i=1}^{m}k_i)/p}}$$

Ersichtlich gilt wieder $s\notin\{0,\infty\}$.

Die Transformation $\psi_B: V(D)\to V(B(D))$;

$$(x,y)\mapsto\left(B(x),\frac{sy}{(x-B^{-1}(\infty))^{(\sum_{i=1}^{m}k_i)/p}}\right)$$

ist biholomorph. Es genügt, die Wohldefiniertheit von ψ_B zu zeigen. Für $(x,y)\in V(D)$ gilt:

$$\left(\frac{sy}{(x-B^{-1}(\infty))^{\left(\sum_{i=1}^{m}k_i\right)/p}}\right)^p \quad \overset{[B^{-1}(\infty)=-\frac{d}{c}]}{=}$$

$$\frac{\prod_{i=2}^{m}\left(\frac{ad-bc}{c\alpha_i+d}\right)^{k_i}}{c^{\sum_{i=1}^{m}k_i}} \cdot \frac{(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}\cdot c^{k_1}}{\left(x+\frac{d}{c}\right)^{\sum_{i=1}^{m}k_i}} \overset{[\text{Notiz 1.1}]}{=}$$

$$\frac{(B(x)-B(\alpha_2))^{k_2}\cdot\ldots\cdot(B(x)-B(\alpha_m))^{k_m}\cdot(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot c^{k_1}}{(cx+d)^{k_1}}$$

$$\overset{[\alpha_1=-\frac{d}{c}]}{=} \quad (B(x)-B(\alpha_2))^{k_2}\cdot\ldots\cdot(B(x)-B(\alpha_m))^{k_m}.$$

Also ist ψ_B wohldefiniert und Fall 2 somit erledigt.

<u>Fall 3:</u> $B(\alpha_i)\neq\infty$ für alle $i\in\{1,\ldots,m\}$ und $\alpha_i=\infty$ für ein $i\in\{1,\ldots,m\}$.

O.B.d.A. sei $\alpha_1=\infty$. Wegen $B^{-1}(\infty)=-\frac{d}{c}\neq\infty$ folgt $c\neq 0$. $V(D)$ und $V(B(D))$ sind gegeben durch

$V(D)$: $y^p=(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}$ und

$V(B(D))$: $y^p=(x-B(\alpha_1))^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-B(\alpha_m))^{k_m}$.

$$\text{Sei}\quad s:=\frac{\sqrt[p]{\prod_{i=2}^{m}\left(\frac{ad-bc}{c\alpha_i+d}\right)^{k_i}}\cdot\sqrt[p]{\left(b-\frac{ad}{c}\right)^{k_1}}}{c^{\left(\sum_{i=1}^{m}k_i\right)/p}}.$$

Offenbar gilt wieder $s \notin \{0, \infty\}$.

Die Transformation $\psi_B : V(D) \longrightarrow V(B(D))$

$$(x, y) \mapsto \left(B(x), \frac{s y}{(x - B^{-1}(\infty))^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)/p}} \right)$$

ist biholomorph. Es ist nur noch die Wohldefiniertheit von ψ_B zu zeigen. Für $(x, y) \in V(D)$ gilt:

$$\left(\frac{s y}{(x - B^{-1}(\infty))^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)/p}} \right)^p \overset{[B^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}]}{=}$$

$$\frac{\prod_{i=2}^{m} \left(\frac{ad - bc}{c\alpha_i + d}\right)^{k_i} \cdot \left(b - \frac{ad}{c}\right)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_m)^{k_m}}{c^{\sum_{i=1}^{m} k_i} \cdot \left(x + \frac{d}{c}\right)^{\sum_{i=1}^{m} k_i}}$$

$$\overset{[\text{Notiz } 1.1.]}{=} \frac{(B(x) - B(\alpha_2))^{k_2} \cdot \ldots \cdot (B(x) - B(\alpha_m))^{k_m} \left(b - \frac{ad}{c}\right)^{k_1}}{(cx + d)^{k_1}}$$

$$= \left(\frac{cb - ad}{c(cx + d)}\right)^{k_1} \cdot (B(x) - B(\alpha_2))^{k_2} \cdot \ldots \cdot (B(x) - B(\alpha_m))^{k_m} =: \lambda$$

Es ist $B(x) - B(\alpha_1) = B(x) - B(\infty) = \frac{ax + b}{cx + d} - \frac{a}{c} = \frac{cb - ad}{c(cx + d)}$

$\Rightarrow \lambda = (B(x) - B(\alpha_1))^{k_1} \cdot \ldots \cdot (B(x) - B(\alpha_m))^{k_m}$.

Also ist ψ_B wohldefiniert und Fall 3 erledigt.

<u>Fall 4:</u> $B(\alpha_i) = \infty$ für ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $\alpha_j = \infty$ für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Fall 4-a): $i = j$.

O.B.d.A. sei $B(\alpha_1) = \infty = \alpha_1$. Man sieht unmittelbar ein, daß dies wieder die Situation von Fall 1-a) ist. Also gibt es wieder ein $s \in \mathbb{C}^*$, so daß die Abbildung $\psi_B : V(D) \to V(B(D))$; $(x,y) \mapsto (B(x), sy)$ wohldefiniert und biholomorph ist.

Fall 4-b): $i \neq j$.

O.B.d.A. sei $\alpha_1 = \infty$ und $B(\alpha_2) = \infty$. Die Riemannschen Flächen $V(D)$ und $V(B(D))$ sind dann gegeben durch

$$V(D): y^p = (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m} \quad \text{und}$$

$$V(B(D)): y^p = (x-B(\alpha_1))^{k_1} \cdot (x-B(\alpha_3))^{k_3} \cdot \ldots \cdot (x-B(\alpha_m))^{k_m}.$$

Wegen $-\frac{d}{c} = B^{-1}(\infty) = \alpha_2 \neq \infty$ ist $c \neq 0$.

$$\text{Sei} \quad s := \frac{\sqrt[p]{\prod_{i=3}^{m}\left(\frac{ad-bc}{c\alpha_i+d}\right)^{k_i}} \cdot \sqrt[p]{\left(b-\frac{ad}{c}\right)^{k_1}} \cdot \sqrt[p]{c^{k_2}}}{c^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)/p}}.$$

Es gilt wieder $s \notin \{0,\infty\}$, und die Transformation

$$\psi_B : V(D) \to V(B(D));\ (x,y) \mapsto \left(B(x), \frac{sy}{(x-B^{-1}(\infty))^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)/p}}\right)$$

ist biholomorph. Es reicht, die Wohldefiniertheit von ψ_B zu zeigen. Man erhält für $(x,y) \in V(D)$:

$$\left(\frac{sy}{(x-B^{-1}(\infty))^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right)/p}}\right)^p =$$

$$\frac{\prod_{i=3}^{m}\left(\frac{ad-bc}{c\alpha_i+d}\right)^{k_i}\cdot\left(b-\frac{ad}{c}\right)^{k_1}\cdot c^{k_2}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_m)^{k_m}}{(cx+d)^{\sum_{i=1}^{m} k_i}}$$

$$\overset{[\text{Notiz } 1.1.]}{=} \frac{(B(x)-B(\alpha_3))^{k_3}\cdot\ldots\cdot(B(x)-B(\alpha_m))^{k_m}(x-\alpha_2)^{k_2}\left(b-\frac{ad}{c}\right)^{k_1}\cdot c^{k_2}}{(cx+d)^{k_1+k_2}}$$

$$\overset{[\alpha_2=-\frac{d}{c}]}{=} \frac{(B(x)-B(\alpha_3))^{k_3}\cdot\ldots\cdot(B(x)-B(\alpha_m))^{k_m}\left(b-\frac{ad}{c}\right)^{k_1}}{(cx+d)^{k_1}}$$

$$\overset{[\text{vgl. Fall } 3]}{=} (B(x)-B(\alpha_1))^{k_1}(B(x)-B(\alpha_3))^{k_3}\cdot\ldots\cdot(B(x)-B(\alpha_m))^{k_m}$$

Also ist ψ_B wohldefiniert. Damit ist auch Fall 4 erledigt und Bemerkung 1. 2. bewiesen. □

Der Beweis von Bemerkung 1.2. hat zudem ergeben:

<u>BEMERKUNG 1.3.:</u> Zu jedem $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ gibt es eine biholomorphe Abbildung $\psi_B : V(D) \to V(B(D))$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V(D) & \xrightarrow{\psi_B} & V(B(D)) \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{B} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

□

NOTIZ 1.2.: Für $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $B \in Aut(\mathbb{P}^1)$ und $D \in \Gamma$ gilt: $r(B(D)) = B(rD)$.

BEWEIS: Es genügt, die Behauptung für Repräsentanten von $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ und $D \in \Gamma$ zu zeigen. Dies aber ist trivial. □

Notiz 1.2. rechtfertigt die abkürzende Schreibweise:

$$(*) \qquad rB(D) := r(B(D)) = B(rD)$$

Sei G die Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times Aut(\mathbb{P}^1)$.
Ein Element $(r, B) \in G$ wird mit rB bezeichnet.

Die Gruppe G operiert offensichtlich auf Γ mittels $(*)$ und deshalb definiert G eine Äquivalenzrelation auf Γ:

$$D \sim D' \bmod G :\Longleftrightarrow \exists\, rB \in G \text{ mit } D' = rB(D).$$

BEMERKUNG 1.4.: Seien $D, D' \in \Gamma$ äquivalent mod G. Dann sind die Riemannschen Flächen $V(D)$ und $V(D')$ biholomorph äquivalent.

BEWEIS: Es gelte $rB(D) = D'$. Nach Bemerkung 1.2. sind $V(D)$ und $V(B(D))$ biholomorph äquivalent. Nach Bemerkung 1.1. sind zudem $V(rB(D))$ und $V(B(D))$ biholomorph äquivalent. Wegen $rB(D) = D'$ liefert dies die biholomorphe Äquivalenz von $V(D)$ und $V(D')$. □

Interessant ist das Resultat, daß unter gewissen Einschränkungen auch die Umkehrung von Bemerkung 1.4 gilt. Dies ist die Aussage von

<u>THEOREM 1.1.:</u> Sei p eine Primzahl und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2p+1$. Weiter seien $D, D' \in \Gamma$.

$V(D)$ und $V(D')$ sind genau dann biholomorph äquivalent, wenn gilt: $D \sim D' \mod G$.

<u>BEWEIS:</u> „$\Leftarrow$" ist in Bemerkung 1.4. bewiesen worden, und zwar ohne die Einschränkung $m \geq 2p+1$.

„$\Rightarrow$" : Für eine kompakte Riemannsche Fläche V sei $Mer_n(V)$ die Menge aller meromorphen Funktionen der Ordnung n auf V.

Der Beweis von „$\Rightarrow$" basiert ganz entscheidend auf folgendem

<u>SATZ 1.1.:</u> [s. Namba M. [2]; Corollary 2.4.4., S. 86]
Sei V eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und p eine Primzahl mit $Mer_p(V) \neq \emptyset$. Sei weiter $f \in Mer_p(V)$ und n eine natürliche Zahl mit $(p-1)\cdot(n-1) \leq g-1$. Ist dann p ein Teiler von n, so läßt sich jedes $h \in Mer_n(V)$ schreiben als Komposition $h = \varrho \circ f$, wobei ϱ eine rationale Funktion $\varrho : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ von der Ordnung $\frac{n}{p}$ ist. Ist

p jedoch kein Teiler von n, so gilt: $Mer_n(V) = \emptyset$.

Seien nun $D, D' \in \Gamma$ mit $D = k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m)$ und $D' = j_1(\beta_1) + \cdots + j_m(\beta_m)$.

Es genügt „=>" für den Fall zu beweisen, daß kein α_i und kein β_j gleich ∞ ist.

Ist die Behauptung nämlich für derartige Divisorenklassen bewiesen und ist dann für irgendein $i \in \{1, \ldots, m\}$ oder $j \in \{1, \ldots, m\}$ $\alpha_i = \infty$ oder $\beta_j = \infty$, so wähle man Automorphismen $B, B' \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $B(\alpha_i) \in \mathbb{C}$ und $B'(\beta_i) \in \mathbb{C}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sind dann $V(D)$ und $V(D')$ biholomorph äquivalent, so ist wegen der biholomorphen Äquivalenz von $V(D)$ und $V(B(D))$ bzw. $V(D')$ und $V(B'(D'))$ auch $V(B(D))$ biholomorph äquivalent zu $V(B'(D'))$. Wegen $B(\alpha_i) \in \mathbb{C}$ und $B'(\beta_i) \in \mathbb{C}$ gilt dann $B(D) \sim B'(D') \bmod G$. Es gibt also ein $\tau C \in G$ mit $B'(D') = \tau C(B(D))$. Daraus folgt aber: $D' = \tau(B'^{-1} \circ C \circ B)(D)$, d.h. $D \sim D' \bmod G$. Es genügt also in der Tat, nur den Fall zu betrachten, daß kein α_i und kein β_j gleich ∞ ist.

Die Riemannschen Flächen $V(D)$ und $V(D')$ sind dann gegeben durch

$V(D)$: $y^p = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m}$ und

$$V(D'):\quad y^p = (x-\beta_1)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(x-\beta_m)^{j_m}\,.$$

Das Geschlecht g von $V(D)$ und $V(D')$ ist dann wegen $k_1+\cdots+k_m \equiv 0 \pmod p$ und $j_1+\cdots+j_m \equiv 0 \pmod p$ gleich $\frac{(p-1)(m-2)}{2}$, wie bereits gezeigt wurde.

$V(D)$ und $V(D')$ seien nun biholomorph äquivalent mittels einer biholomorphen Abbildung $\phi : V(D) \to V(D')$.

Nach Voraussetzung ist $m \geq 2p+1$. Es folgt:

$$g = \frac{(p-1)(m-2)}{2} \geq \frac{(p-1)(2p-1)}{2} = (p-1)(p-\tfrac{1}{2}) \gneq (p-1)^2$$

und damit: $g-1 \geq (p-1)^2$.

Man kann nun Satz 1.1. mit $n=p$ anwenden. Es ist $x \in \mathrm{Mer}_p(V(D))$. Also läßt sich nach Satz 1.1. jedes $\sigma \in \mathrm{Mer}_p(V(D))$ schreiben als $\sigma = B\circ x$, wobei B eine rationale Funktion $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ von der Ordnung $p/p = 1$ ist, d.h.: $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

Da $\phi : V(D) \to V(D')$ biholomorph ist, besitzt $x\circ\phi : V(D) \to \mathbb{P}^1$ die Ordnung p. Es gibt also einen Automorphismus $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$
[1] \qquad
\begin{tikzcd}
V(D) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "x"'] & V(D') \arrow[d, "x"] \\
\mathbb{P}^1 \arrow[r, "B"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}
.
$$

(*) Von nun an wird die Vor.: $m \geq 2p+1$ nicht mehr benötigt!

Der Automorphismus B aus Diagramm [1] ist eindeutig bestimmt. Ist nämlich C ein zweiter solcher Automorphismus, so folgt aus $(B \circ x)(x, y) = (C \circ x)(x, y)$ sofort $B(x) = C(x)$.

Nach Bemerkung 1.3. sind die Riemannschen Flächen $V(D')$ und $V(B^{-1}(D'))$ mittels einer biholomorphen Abbildung $\psi_{B^{-1}}$ biholomorph äquivalent. Mittels der Komposition $\psi_{B^{-1}} \circ \phi : V(D) \longrightarrow V(B^{-1}(D'))$ sind $V(D)$ und $V(B^{-1}(D'))$ ebenfalls biholomorph äquivalent.

Die kanonische meromorphe Projektion $x : V(B^{-1}(D')) \to \mathbb{P}$ werde aus Gründen der besseren Unterscheidbarkeit zu $x : V(D) \to \mathbb{P}^1$ mit x' bezeichnet. Weiter seien ϕ_1, ϕ_2 die Komponentenfunktionen von ϕ, d.h.: $\phi = (\phi_1, \phi_2)$.

Das folgende Diagramm erweist sich als kommutativ.

$$[2] \qquad \begin{tikzcd} V(\mathcal{D}) \arrow[rr, "\psi_{B^{-1}} \circ \phi"] \arrow[d, "x"'] & & V(B^{-1}(\mathcal{D}')) \arrow[dll, "x'"] \\ \mathbb{P}^1 & & \end{tikzcd}$$

Es gilt nämlich einerseits für alle $(x, y) \in V(\mathcal{D})$:

$$x' \circ \psi_{B^{-1}} \circ \phi(x, y) = x' \circ \psi_{B^{-1}}(\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) \overset{\text{[Kommutativität des Diagramms aus Bemerkung 1.3.]}}{=} B^{-1}(\phi_1(x, y))$$

Andererseits gilt auf Grund der Kommutativität von Diagramm [1]:

$$x(x, y) = B^{-1} \circ x' \circ \phi(x, y) =$$
$$B^{-1} \circ x'(\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) = B^{-1}(\phi_1(x, y)).$$

Diagramm [2] kommutiert also. Weiter gilt

<u>NOTIZ 1.3.:</u> Für den Automorphismus $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ aus Diagramm [1] gilt: $B(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}) = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$.

<u>BEWEIS:</u> Wegen $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\beta_i \in \mathbb{C}$ und $k_1 + \cdots + k_m \equiv 0 \pmod p$ und $j_1 + \cdots + j_m \equiv 0 \pmod p$ verzweigen $x : V(\mathcal{D}) \to \mathbb{P}^1$ und $x' : V(\mathcal{D}') \to \mathbb{P}^1$ nicht über ∞. x verzweigt also genau über

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ und x' verzweigt genau über $\beta_1, \dots, \beta_m$. Sei nun $k \in \{1, \dots, m\}$. Bzgl. x' liegen über $B(\alpha_k)$ mit Vielfachheit gerechnet p Punkte $(B(\alpha_k), u_1), \dots, (B(\alpha_k), u_p)$ auf $V(D')$. Sei $i \in \{1, \dots, p\}$. Zu $(B(\alpha_k), u_i)$ gibt es wegen der Bijektivität von $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ genau ein $(x, y) \in V(D)$ mit $\phi(x, y) = (B(\alpha_k), u_i)$. Für dieses (x, y) gilt also $\phi_1(x, y) = B(\alpha_k)$, d.h.: $x' \circ \phi(x, y) = B(\alpha_k)$. Da Diagramm [1] kommutiert, gilt $x' \circ \phi = B \circ x \Rightarrow B(x) = B(\alpha_k) \Rightarrow x = \alpha_k$. Der einzige Punkt $(x, y) \in V(D)$ mit $x = \alpha_k$ ist $(x, y) = (\alpha_k, 0)$. Somit gilt also für jedes $i \in \{1, \dots, p\}$: $\phi(\alpha_k, 0) = (B(\alpha_k), u_i) \Rightarrow u_1 = \dots = u_p \Rightarrow x'$ verzweigt über $B(\alpha_k)$, d.h.: $B(\alpha_k) \in \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Aus $B^{-1}(\{\beta_1, \dots, \beta_m\}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ folgt die Existenz einer Permutation $\sigma \in S_m$ mit:

$$B^{-1}(D') = j_{\sigma(1)}(\alpha_1) + \dots + j_{\sigma(m)}(\alpha_m).$$

Sei $l_i := j_{\sigma(i)}$. Wegen $l_1 + \dots + l_m \equiv 0 \pmod p$ ist die Riemannsche Fläche $V(B^{-1}(D'))$ also gegeben durch

$$V(B^{-1}(D')) : z^p = (x' - \alpha_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x' - \alpha_m)^{l_m}.$$

Für die meromorphe Funktion $w := z \circ \psi_{B^{-1}} \circ \phi : V(D) \to \mathbb{P}^1$ gilt dann für beliebiges $(x, y) \in V(D)$:

$$w^p(x,y) = (z(\psi_{B-1} \circ \phi(x,y)))^p =$$

$$\prod_{i=1}^{m} (x' \circ \psi_{B-1} \circ \phi(x,y) - \alpha_i)^{l_i} = \text{[Diagramm[2] kommutiert]}$$

$$\prod_{i=1}^{m} (x(x,y) - \alpha_i)^{l_i}.$$

Es gilt also auf $V(D)$:

$$(2) \qquad w^p = (x-\alpha_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{l_m}$$

Da w und y meromorph auf $V(D)$ sind, gilt dies auch für die Funktion

$$v := \frac{w^{k_1}}{y^{l_1}} .$$

Für diese Funktion v gilt

$$v^p = (x-\alpha_2)^{k_1 l_2 - l_1 k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_1 l_m - l_1 k_m},$$

denn wegen (2) erhält man:

$$\frac{w^{k_1 p}}{y^{l_1 p}} = \frac{((x-\alpha_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{l_m})^{k_1}}{((x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m})^{l_1}} =$$

$$(x-\alpha_2)^{k_1 l_2 - l_1 k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_1 l_m - l_1 k_m}.$$

Es gilt nun weiter:

<u>NOTIZ 1.4.:</u> v ist eine rationale Funktion von x.

<u>BEWEIS:</u> <u>Annahme:</u> v läßt sich nicht rational

durch x ausdrücken.

Dann ist $\mathbb{C}(x,v)$ ein echter Oberkörper von $\mathbb{C}(x)$, d. h.: $[\mathbb{C}(x,v):\mathbb{C}(x)] \geq 2$. Wegen $p = [Mer(V(D)):\mathbb{C}(x)]$ [s. Forster O. [1]; S. 53] folgt dann mittels der Gradformel: $p = [Mer(V(D)):\mathbb{C}(x,v)] \cdot [\mathbb{C}(x,v):\mathbb{C}(x)]$. Da $[\mathbb{C}(x,v):\mathbb{C}(x)] \geq 2$ gilt und p eine Primzahl ist, muß $[Mer(V(D)):\mathbb{C}(x,v)] = 1$ gelten, d. h.: $Mer(V(D)) = \mathbb{C}(x,v)$.

Sei F ein irreduzibler Faktor der Gleichung

$$(G) \quad v^p - (x-\alpha_2)^{k_1 l_2 - l_1 k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_1 l_m - l_1 k_m} = 0.$$

Ein solches F existiert, da ansonsten v konstant, also rational wäre! F definiert dann eine kompakte Riemannsche Fläche R. Wegen $Mer(R) = \mathbb{C}(x,v)$ folgt zusammen mit $Mer(V(D)) = \mathbb{C}(x,v)$, daß R und $V(D)$ biholomorph äquivalent sind [s. Gunning R. C. [1]; S. 258, Korollar]. Also müssen R und $V(D)$ das gleiche Geschlecht g besitzen.

Auf R ist x eine p'-blättrige Überlagerung mit $p' \leq p$. Selbst wenn x über ∞ verzweigt, so verzweigt x auf R in höchstens m Punkten. Sei P ein solcher Punkt. Für die Verzweigungsordnung b_P in P gilt dann: $b_P \leq p'-1$. Dies bedeutet für die Gesamtverzweigungsordnung

b von x auf R aber: $b \leq m(p-1)$. Somit gilt nach der Formel von Riemann-Hurwitz für das Geschlecht g von R:

$$g = \frac{b}{2} - p' + 1 \leq \frac{m(p'-1)}{2} - p' + 1 = \frac{(m-2)(p'-1)}{2}$$
$$\leq \frac{(m-2)(p-1)}{2} =: g_1 .$$

Die Zahl g_1 ist das Geschlecht von $V(\mathfrak{D})$. In den obigen Ungleichungen können dann und nur dann Gleichheitszeichen stehen, wenn $p = p'$ gilt und x auf R in genau m Punkten voll verzweigt. Dies bedeutet, daß die Gleichung (G) irreduzibel ist und x auf R über ∞ verzweigt. Die Irreduzibilität von (G) liefert, daß R gleichungsdefiniert ist durch

$$R: \; v^p = (x-\alpha_2)^{k_1 l_2 - l_1 k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_1 l_m - l_1 k_m} .$$

Da x über $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ voll verzweigt, kann man für $j \in \{2, \ldots, m\}$ annehmen: $k_1 l_j - l_1 k_j \not\equiv 0 \pmod p$. Weil x zudem über ∞ voll verzweigt, folgt dann insbesonders:

$$\sum_{j=2}^{m} k_1 l_j - l_1 k_j \not\equiv 0 \pmod p .$$

Andererseits gilt wegen $\sum_{i=1}^{m} l_i \equiv 0 \pmod p$ und $\sum_{i=1}^{m} k_i \equiv 0 \pmod p$ aber, daß p ein Teiler von $\sum_{j=2}^{m} k_1 l_j - \sum_{j=2}^{m} l_1 k_j =$

$$k_1 \cdot \sum_{j=1}^{m} l_j - l_1 \cdot \sum_{j=1}^{m} k_j$$ ist. Widerspruch!

Also ist v eine rationale Funktion von x. □

Auf Grund von Notiz 1.4. kann man Gleichung (G) in der Form

$$(h(x))^p = (x-\alpha_2)^{k_1 l_2 - l_1 k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_1 l_m - l_1 k_m}$$

schreiben, wobei h eine rationale Funktion ist. Die Rationalität von h impliziert sofort:

$$k_1 l_2 - l_1 k_2 \equiv 0 \pmod p$$
$$k_1 l_3 - l_1 k_3 \equiv 0 \pmod p$$
$$\vdots$$
$$k_1 l_m - l_1 k_m \equiv 0 \pmod p).$$

Für die entsprechenden Restklassen bedeutet dieses Kongruenzensystem nichts anderes als

$$\hat{k}_1 \hat{l}_2 = \hat{l}_1 \hat{k}_2 ; \hat{k}_1 \hat{l}_3 = \hat{l}_1 \hat{k}_3 ; \cdots ; \hat{k}_1 \hat{l}_m = \hat{l}_1 \hat{k}_m .$$

Da p keine der Zahlen k_j teilt, sind diese Gleichungen äquivalent zu

$$\frac{\hat{l}_1}{\hat{k}_1} = \frac{\hat{l}_2}{\hat{k}_2} ; \cdots ; \frac{\hat{l}_1}{\hat{k}_1} = \frac{\hat{l}_m}{\hat{k}_m} .$$

Sei $\tau := \frac{\hat{l}_1}{\hat{k}_1} = \frac{\hat{l}_2}{\hat{k}_2} = \cdots = \frac{\hat{l}_m}{\hat{k}_m} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

Für die Divisorenklasse τD erhält man nach Definition von τ nun

(3) $\tau D = \tau k_1(\alpha_1) + \dots + \tau k_m(\alpha_m) = \ell_1(\alpha_1) + \dots + \ell_m(\alpha_m) = B^{-1}(D')$

$\tau D = B^{-1}(D')$ ist nach Notiz 1.2. aber gleichbedeutend mit $D' = \tau B(D)$, d.h.: $D \sim D'$ mod G. Damit ist Theorem 1.1. vollständig bewiesen. □

Das nachfolgende Theorem 1.2. gestattet es, die Berechnung der Ordnung der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(V(D))$ der kompakten Riemannschen Fläche $V(D)$ auf die Berechnung der Ordnung einer von den Verzweigungspunkten von $V(D)$ abhängigen endlichen Untergruppe der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ zurückzuführen.

<u>THEOREM 1.2.:</u> Sei $D \in \Gamma$, p eine Primzahl und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2p+1$.
Sei K_p die folgende Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V(D))$:

$$K_p := \{\tilde{\eta}^j : V(D) \ni (x,y) \mapsto (x, \eta^j y) \in V(D) \mid \eta = e^{\frac{2\pi i}{p}} ;\ 0 \leq j \leq p-1\}$$

und L_D die folgende Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$:

$$L_D := \{B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid \exists \tau \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \text{ mit } B(D) = \tau D\}.$$

Zu jedem $\phi \in \mathrm{Aut}(V(D))$ gibt es genau ein $B_\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ mit $x \circ \phi = B_\phi \circ x$. Die Abbildung

$\tau : Aut(V(D)) \to L_D$; $\Phi \mapsto B_\Phi$ ist dann ein Gruppenhomomorphismus, und es gilt weiter: Die Sequenz

$$1 \longrightarrow K_p \xhookrightarrow{\text{inkl.}} Aut(V(D)) \xrightarrow{\tau} L_D \longrightarrow 1$$

ist exakt.

<u>BEMERKUNG:</u> K_p ist die Decktransformationsgruppe bzgl. χ und besitzt die Ordnung p.

Daß die Elemente von K_p Decktransformationen bzgl. χ sind, ist klar. Weiter ist die Überlagerung χ galoissch; denn sind $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in V(D)$ mit $\chi(x_0, y_0) = \chi(x_1, y_1)$, d.h.: $x_0 = x_1$, so gilt $y_1 = \exp(2\pi i j/p) y_0$ für ein $j \in \{0, \dots, p-1\}$ und also $\tilde{\eta}^j(x_0, y_0) = (x_0, y_1) = (x_1, y_1)$. Der Grad der Körpererweiterung $\mathbb{C}(x,y) : \mathbb{C}(x)$ ist gleich p [s. Forster O. [1]; Satz 8.12, S.53].
$\chi : V(D) \to \mathbb{P}^1$ ist aber genau dann galoissch, wenn die Decktransformationsgruppe $Deck(V(D) \xrightarrow{\chi} \mathbb{P}^1)$ aus genau $[\mathbb{C}(x,y) : \mathbb{C}(x)] = p$ Elementen besteht [s. Forster O. [1]; S. 53 unten]. Also gilt: $K_p = Deck(V(D) \xrightarrow{\chi} \mathbb{P}^1)$. $\square$

<u>BEMERKUNG:</u> L_D ist eine endliche Untergruppe von $Aut(\mathbb{P}^1)$.

Daß L_D eine Untergruppe von $Aut(\mathbb{P}^1)$ ist, kann man wie folgt einsehen.

Wegen $id_{\mathbb{P}^1} \in L_D$ ist $L_D \neq \emptyset$. Sind nun $B, C \in L_D$, so existieren $r, s \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ mit $B(D) = rD$ und $C(D) = sD$. Es gilt also $B^{-1}(rD) = D$, woraus mit Notiz 1.2. folgt: $r(B^{-1}(D)) = D$. Mithin gilt: $B^{-1}(D) = r^{-1}D$, d. h.: $B^{-1} \in L_D$. Weiter gilt $(B \circ C)(D) = B(sD) = s(B(D)) = srD$. Somit ist auch $B \circ C$ ein Element von L_D.

Es gibt nur endlich viele Äquivalenzklassen $rD \in \Gamma$; $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $D \in \Gamma$. Gilt $D = k_1(\alpha_1) + \dots + k_m(\alpha_m)$, so ist $B(D) = rD$ gleichbedeutend mit
$k_1 B(\alpha_1) + \dots + k_m B(\alpha_m) = rk_1(\alpha_1) + \dots + rk_m(\alpha_m)$.
Es muß also notwendig $B(\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ gelten. Hieraus folgt $ord(L_D) < \infty$, denn wegen $m \geq 2p+1$ gilt $m \geq 3$ und ein Automorphismus $B \in Aut(\mathbb{P}^1)$ ist durch die Vorgabe von drei Punkten und deren Bildern bereits eindeutig bestimmt.

<u>BEWEIS (von Theorem 1.2.)</u>: Sei $\phi \in Aut(V(D))$. Wegen $m \geq 2p+1$ kommutiert Diagramm [1]. Es gibt also genau ein $B_\phi \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $\chi \circ \phi = B_\phi \circ \chi$. Also ist τ wohldefiniert.

Für $\phi_1, \phi_2 \in Aut(V(D))$ gilt $\tau(\phi_1) \circ \tau(\phi_2) = B_{\phi_1} \circ B_{\phi_2}$. Andererseits gilt wegen $\chi \circ \phi_1 \circ \phi_2 =$

$B_{\phi_1}\circ \chi \circ \phi_2 = B_{\phi_1} \circ B_{\phi_2} \circ \chi$ aber auch $B_{\phi_1} \circ B_{\phi_2} = B_{\phi_1 \circ \phi_2} = \tau(\phi_1 \circ \phi_2)$. Also ist τ ein Gruppen-homomorphismus. Zu zeigen ist noch

(i): $\mathrm{Bild}(\tau) = L_D$ und
(ii): $\mathrm{Kern}(\tau) = K_p$

<u>zu (i):</u> Sei $B \in L_D$. Dann gibt es also ein $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ mit $B(D) = rD$, d.h.: $D = rB^{-1}(D)$. Bemerkung 1.3. und der Beweis von Bemerkung 1.1. liefern die Existenz einer biholomorphen Abbildung $\phi = (\phi_1, \phi_2): V(D) \to V(rB^{-1}(D))$ mit $\phi_1(x,y) = B^{-1}(x)$. Wegen $m \geq 2p+1$ gibt es zu diesem ϕ genau ein $C \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ mit $C \circ \chi = \chi \circ \phi$. Somit gilt $C \in \mathrm{Bild}(\tau)$. Wegen $\phi_1(x,y) = B^{-1}(x)$ folgt $C(x) = B^{-1}(x)$. Also liegt B^{-1} und somit auch B in $\mathrm{Bild}(\tau)$.

Sei umgekehrt $B \in \mathrm{Bild}(\tau)$. Dann gibt es also einen Automorphismus $\phi \in \mathrm{Aut}(V(D))$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V(D) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\chi"'] & V(D) \arrow[d, "\chi"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "B=\tau(\phi)"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}.$$

(**): Von nun an ist die Bedingung $m \geq 2p+1$ überflüssig!

Es gibt dann ein $r \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ mit $B^{-1}(\mathcal{D}) = r\mathcal{D}$ [siehe (3) im Beweis zu Theorem 1.1.]. Hieraus folgt aber schon $B^{-1} \in L_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow B \in L_{\mathcal{D}}$. Damit ist $\mathrm{Bild}(\tau) = L_{\mathcal{D}}$ gezeigt.

<u>zu (ii):</u> Sei $\tilde{\eta}^j \in K_p$. Es gibt genau ein $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V(\mathcal{D}) \arrow[r, "\tilde{\eta}^j"] \arrow[d, "\chi"'] & V(\mathcal{D}) \arrow[d, "\chi"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "B"] & \mathbb{P}^1 . \end{tikzcd}$$

Es gilt also $B(x) = B \circ \chi(x,y) = \chi \circ \tilde{\eta}^j(x,y) = \chi(x, \eta^j y) = x$,
d.h.: $B = id_{\mathbb{P}^1} \Rightarrow K_p \subset \mathrm{Kern}(\tau)$.

Gilt umgekehrt $\phi \in \mathrm{Kern}(\tau)$, d.h.: $\tau(\phi) = id_{\mathbb{P}^1}$, so bedeutet dies nach Definition von τ: $\chi = \chi \circ \phi$. Hieraus folgt $\phi(x,y) = (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)) = (x, \phi_2(x,y))$. Ist $V(\mathcal{D})$ gleichungsdefiniert durch

$$V(\mathcal{D}): y^p = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m},$$

so folgt $(\phi_2(x,y))^p = y^p$, also $\phi_2(x,y) = \eta^j y$ mit $\eta = \exp(2\pi i/p)$ und einem $j \in \{0,\ldots,p-1\}$. Wegen des Identitätssatzes und weil j nur endlich viele Werte durchläuft, kann j unabhängig von y gewählt werden. Es gilt also $\phi \in K_p$.

Damit ist auch $\mathrm{Kern}(\tau) = K_p$ gezeigt und Theorem 1.2. somit bewiesen. $\square$

BEMERKUNG: Für die in Theorem 1.1. betrachteten Riemannschen Flächen $V(D)$ wurde die eingangs geäußerte Vermutung vollauf bestätigt. Die biholomorphen Äquivalenzklassen dieser Riemannschen Flächen ließen sich vollständig durch die Punkte beschreiben, über denen die kanonische meromorphe Projektion $x: V(D) \to \mathbb{P}^1$ verzweigt. Theorem 1.2. hat ergeben, daß die Ordnung der Automorphismengruppe $Aut(V(D))$ von der Anzahl der Automorphismen aus $Aut(\mathbb{P}^1)$ abhängt, die diese Punkte bijektiv aufeinander abbilden. □

Eine triviale Folgerung aus den Theoremen 1.1./1.2. ist die Beobachtung, daß sich die Kernaussagen dieser Theoreme, nämlich ein Isomorphiekriterium und eine Aussage über die Ordnung der Automorphismengruppe, unmittelbar auf die Elemente der entsprechenden biholomorphen Äquivalenzklassen Riemannscher Flächen übertragen lassen. Man erhält:

BEMERKUNG 1.5. Seien $D, D' \in \Gamma$, p eine Primzahl, $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2p+1$ und K_p, L_D wie in den Theoremen 1.1./1.2. definiert. Weiter seien R bzw. R' Riemannsche Flächen, die zu

$V(\mathcal{D})$ bzw. $V(\mathcal{D}')$ biholomorph äquivalent sind. Dann gilt:

(i): R und R' sind genau dann biholomorph äquivalent, wenn gilt: $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}' \bmod G$.

(ii): $\operatorname{ord}(\operatorname{Aut}(R)) = \operatorname{ord}(K_p)\cdot\operatorname{ord}(L_{\mathcal{D}}) = p\cdot\operatorname{ord}(L_{\mathcal{D}})$. □

Wenn im folgenden davon die Rede ist, daß für Riemannsche Flächen R, R' die Theoreme 1.1./1.2. gelten, diese aber nicht unmittelbar anwendbar sind, so soll damit stets gemeint sein, daß für R, R' die entsprechenden Aussagen (i) bzw. (ii) von Bemerkung 1.5. gültig sind.

<u>BEISPIEL 1.1.:</u> (Hyperelliptische Riemannsche Flächen)
Die hyperelliptischen Riemannschen Flächen sind genau die Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g > 1$, die biholomorph äquivalent sind zu Riemannschen Flächen V, die gleichungsdefiniert sind durch

$$V:\ y^2 = (x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{2g+2})$$

mit paarweise verschiedenen $\alpha_i \in \mathbb{C}$ [s. Farkas H.M./Kra I.; S. 96. Dort zählen auch die Zahlenkugel und die Tori zu den hyperelliptischen Riemannschen Flächen. Dies wird hier ausgeschlossen.].

Wegen $2g+2 > 5$ und $2g+2 \equiv 0 \pmod 2$ gelten also für sämtliche hyperelliptischen Riemannschen Flächen die Theoreme 1.1./1.2.

BEISPIEL 1.2.: (Tori)
Die Tori $\mathbb{C}/L$, L Gitter in $\mathbb{C}$, lassen sich bekanntlich mit den kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht 1, also den elliptischen Kurven über $\mathbb{C}$, identifizieren. Jede solche Kurve ist biholomorph äquivalent zu einer Riemannschen Fläche V in Weierstraßscher Normalform

$$V: \ y^2 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

mit paarweise verschiedenen $\alpha_i \in \mathbb{C}$ [s. Mumford D. [1]; S. 150]. Man kann nun einen Automorphismus $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ finden mit $B(\alpha_1) = 0$, $B(\alpha_2) = 1$ und $B(\infty) = \infty$. Sei $\lambda := B(\alpha_3) \in \mathbb{C}$. Dann ist also sogar jeder Torus $\mathbb{C}/L$ biholomorph äquivalent zu einer Riemannschen Fläche V_λ, die gleichungsdefiniert ist durch

$$V_\lambda : \ y^2 = x(x-1)(x-\lambda).$$

Ein klassisches Resultat ist, daß die biholomorphe Äquivalenz dieser Riemannschen Flächen V_λ durch die Weierstraßsche j-Invariante

$j(V_\lambda) := \dfrac{2^8(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$ entschieden wird. (Der

Faktor 2^8 ist im Hinblick darauf angebracht, daß in der algebraischen Geometrie i.a. algebraische Kurven über beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körpern betrachtet werden.) Für die Riemannschen Flächen V_λ gilt nun der

<u>SATZ 1.2.:</u> [s. Hartshorne R. [1]; S. 317, Theorem 4.1.]
Zwei Riemannsche Flächen V_λ, V_μ sind genau dann biholomorph äquivalent, wenn $j(V_\lambda) = j(V_\mu)$ gilt. Umgekehrt ist jedes $\tau \in \mathbb{C}$ die Weierstraßsche j-Invariante einer Riemannschen Fläche V_λ.

Weiter gilt [s. Hartshorne R. [1]; S. 320]:

$$j(V_\lambda) = j(V_\mu) \Leftrightarrow \mu \in \left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}\right\}. \square$$

Die Bedingung für μ aus Satz 1.2. ist aber gleichbedeutend zur Existenz eines Automorphismus $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ mit $B(\{0,1,\lambda,\infty\}) = \{0,1,\mu,\infty\}$. Dies folgt durch eine einfache Rechnung, wenn man nur berücksichtigt, daß es zu paarweise verschiedenen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{P}^1$ und paarweise verschiedenen $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{P}^1$ stets genau ein $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ mit $B(w_i) = z_i$ gibt.

Die kanonische meromorphe Projektion $x: V_\lambda \to \mathbb{P}^1$ verzweigt genau über $0, 1, \lambda$ und ∞. Der V_λ zugeordnete Divisor $D_\lambda \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1)$ ist somit:

$\mathcal{D}_\lambda = (0) + (1) + (\lambda) + (\infty)$. Sind nun zwei Tori V_λ, V_μ biholomorph äquivalent, so besagt die Existenz eines $B \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $B(\{0,1,\lambda,\infty\}) = \{0,1,\mu,\infty\}$ nichts anderes als $\mathcal{D}_\lambda \sim \mathcal{D}_\mu$ mod G.

Für alle Tori bleibt also die Aussage von Theorem 1.1. gültig.

Völlig umgekehrt verhält es sich mit der Aussage von Theorem 1.2. Diese gilt nämlich für keinen einzigen Torus, da die Automomorphismengruppe eines jeden Torus T von unendlicher Ordnung ist. Gilt $T \approx \mathbb{C}/L$, L Gitter in $\mathbb{C}$, so ist ersichtlich für jedes $w \in \mathbb{C}/L$ die Translation $t(w): \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L$, $z \mapsto z + w$ ein Automorphismus.

<u>BEMERKUNG:</u> Satz 1.2. besagt insbesonders auch, daß die Menge der biholomorphen Äquivalenzklassen der Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g = 1$ sich bijektiv auf $\mathbb{C}$ abbilden läßt. Dies ist eine Präzisierung der in der Literatur häufig anzutreffenden Formulierung: „Die Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g = 1$ hängen von einem komplexen Parameter ab." $\square$

Die folgenden Beispiele behandeln den Fall $p = 3$ und $m < 2p+1$.

Sei $\mathcal{D} = k_1(\alpha_1) + \cdots + k_m(\alpha_m) \in \Gamma$, $p = 3$ und $m < 5$. Für das Geschlecht g der zugehörigen Riemannschen Fläche $V(\mathcal{D})$ erhält man wegen $k_1 + \cdots + k_m \equiv 0 \pmod 3$

1) für $m = 2$: $g = 0$,
2) für $m = 3$: $g = 1$,
3) für $m = 4$: $g = 2$.

Für $m < 5$ erhält man also entweder einen Trivialfall, die Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$, oder bereits behandelte Klassen Riemannscher Flächen; nämlich Tori und hyperelliptische Flächen.

Es genügt also, den Fall $m \in \{5, 6\}$ zu betrachten.

<u>BEISPIEL 1.3.:</u> $p = 3$ und $m = 5$.
Es wird sich zeigen, daß Theorem 1.1. gültig bleibt. Theorem 1.2. jedoch verliert in diesem Fall die Allgemeingültigkeit.

Sei $\mathcal{D}_1 = k_1(\gamma_1) + \cdots + k_5(\gamma_5) \in \Gamma$. Man kann direkt $k_i \in \{1, 2\}$ annehmen. Wegen $k_1 + \cdots + k_5 \equiv 0 (\mathrm{mod}$ und $k_i \not\equiv 0 \pmod 3$ folgt dann: $k_1 + \cdots + k_5 \in \{6, 9\}$

Ist $k_1 + \cdots + k_5 = 9$, so sind notwendigerweise vier k_i gleich 2 und ein k_i ist gleich 1. Dann gilt aber $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2 \bmod G$ mit $\mathcal{D}_2 = \ell_1(\gamma_1) + \cdots + \ell_5(\gamma_5)$

und $l_i = 1$, falls $k_i = 2$ und $l_i = 2$, falls $k_i = 1$. Also kann man direkt $k_1 + \dots + k_5 = 6$ annehmen.

Ferner kann man den Punkt γ_i mit $k_i = 2$ mittels eines Automorphismus $A \in Aut(\mathbb{P}^1)$ auf ∞ abbilden und zwei Punkte γ_i mit $k_i = 1$ auf die Punkte 0 und 1. Somit gilt:

$\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D} \mod G$ mit $\mathcal{D} = (0) + (1) + (\alpha_1) + (\alpha_2) + 2(\infty)$, wobei α_1, α_2 komplexe Zahlen sind mit $\alpha_i \notin \{0, 1\}$ und $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Um die Gültigkeit der Theoreme 1.1./1.2. im Fall $p = 3$ und $m = 5$ nachzuprüfen, genügt es also, Divisorenklassen vom Typ $\mathcal{D}$ zu betrachten.

Sei $\mathcal{D}' = (0) + (1) + (\beta_1) + (\beta_2) + 2(\infty)$ eine weitere solche Divisorenklasse. Zu $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ gehören also die Riemannschen Flächen

$V(\mathcal{D})$: $y^3 = x(x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ und

$V(\mathcal{D}')$: $y^3 = x(x-1)(x-\beta_1)(x-\beta_2)$.

Für das Geschlecht g von $V(\mathcal{D})$ gilt wegen $k_1 + \dots + k_5 \equiv 0 \pmod 3$: $g = (p-1)(m-2)/2 = 3$. Weiter gilt:

<u>NOTIZ 1.5.:</u> $V(\mathcal{D})$ ist nicht hyperelliptisch.

BEMERKUNG: Ohne nochmalige explizite Erwähnung werden sämtliche folgenden Nicht-hyperelliptizitäts-nachweise mit Hilfe des nachstehenden Satzes geführt.

SATZ: [s. Farkas H. M. /Kra I. [1]; Proposition III 7.10., S.102]
Auf den hyperelliptischen Riemannschen Flächen vom Geschlecht g besitzt jede meromorphe Funktion mit einer Ordnung $\leq g$ eine gerade Ordnung. □

Hierbei wird unter der Ordnung einer eigentlichen Überlagerung f die Blätterzahl $b(f)$ von f verstanden.

BEWEIS: (von Notiz 1.5.)
Da das Geschlecht von $V(D)$ gleich 3 ist und $x \in Mer_3(V(D))$ gilt, ist $V(D)$ nicht hyperelliptisch. □

Da die hyperelliptischen Riemannschen Flächen vom Geschlecht g die einzigen kompakten Riemannschen Flächen mit genau $2g+2$ Weierstraß-Punkten sind [s. Farkas H. M. /Kra I. [1]; Theorem III 7.3., S. 95], ergibt sich aus den weiteren Betrachtungen mit Hilfe der Weierstraß-Punkte von $V(D)$ ein anderer Beweis von Notiz 1.5.

$V(D)$ und $V(D')$ sind bzgl. der kanonischen meromorphen Projektion x über ∞ voll verzweigt. Sei $P_\infty \in V(D)$, bzw. $Q_\infty \in V(D')$ der über ∞ gelegene Punkt. Es gilt dann:

LEMMA 1.1.: $V(D)$ und $V(D')$ seien biholomorph äquivalent. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $f: V(D) \to V(D')$ mit $f(P_\infty) = Q_\infty$.

BEWEIS: Für die folgende Argumentation wird benötigt:

WEIERSTRASS'SCHER LÜCKENSATZ: [s. Ahlfors L.V./ Sario L. [1]; Theorem 28 C, S. 330] Sei V eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $a \in V$. Dann gibt es genau g natürliche Zahlen $n_1, \dots, n_g$ mit $0 < n_1 < \dots < n_g < 2g$, so daß keine meromorphe Funktion auf V an der Stelle a einen Pol der Ordnung $k \in \{n_1, \dots, n_g\}$ besitzt und in allen sonstigen Punkten auf V holomorph ist. Das g-Tupel $(n_1, \dots, n_g)$ heißt Lückenfolge in a. Die Punkte, deren Lückenfolge sich von $(1, 2, \dots, g)$ unterscheidet, sind genau die Weierstraß-Punkte auf V.

Die Zahl $w_a := \sum_{i=1}^{g} n_i - \sum_{i=1}^{g} i$ wird als das Gewicht von a bezeichnet, und es gilt weiter [s. Iitaka S. [1]; S. 219 – S. 221 und Proposition 6.7. (iii)]:

w_a ist gleich der Nullstellenordnung der Wronski-Determinante $W_a(\omega_1, \dots, \omega_g)$ bzgl. einer Basis $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ des $\mathbb{C}$-linearen Raums der holomorphen Differentialformen auf V. $\square$

NOTIZ 1.6.: Sind V, W kompakte Riemannsche Flächen und ist $f: V \to W$ biholomorph, so bildet f Weierstraß-Punkte vom Gewicht w wieder auf solche Punkte ab.

BEWEIS: Ist $a \in V$, so besitzt $f(a)$ ersichtlich die gleiche Lückenfolge wie a. $\square$

Sei $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,0)$, $P_{\alpha_1} = (\alpha_1, 0)$, $P_{\alpha_2} = (\alpha_2, 0)$ und $Q \in \{P_0, P_1, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}\}$.

$\dfrac{1}{x-Q}$ besitzt in Q einen Pol der Ordnung 3 und ist ansonsten holomorph.

$\dfrac{y}{(x-Q)^2}$ besitzt wegen $(y) = P_0 + P_1 + P_{\alpha_1} + P_{\alpha_2} - 4P_\infty$ in Q einen Pol der Ordnung 5 und ist ansonsten holomorph.

Die Lückenfolge in Q ist also $(1,2,4)$. Somit sind $P_0, P_1, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}$ Weierstraß-Punkte vom Gewicht $(1-1)+(2-2)+(4-3) = 1$.

In P_∞ besitzt x einen Pol der Ordnung 3 und ist ansonsten holomorph.

Die Lückenfolge in P_∞ ist also $(1,2,5)$. Somit ist P_∞ ein Weierstraß-Punkt vom Gewicht $(1-1)+(2-2)+(5-3) = 2$.

Für eine kompakte Riemannsche Fläche R bezeichne $\Omega(R)$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der holomorphen Differentialformen auf R. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Differentialformen $\omega_1 = \frac{dx}{y}$, $\omega_2 = \frac{x\,dx}{y^2}$, $\omega_3 = \frac{dx}{y^2}$ eine Basis von $\Omega(V)$ bilden. Um jeden Punkt $Z \in V$ mit $Z \notin \{P_0, P_1, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, P_\infty\}$ kann man x als Karte wählen. Für die Wronski-Determinante $W_Z(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ gilt dann für jedes $Z \notin \{P_0, P_1, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, P_\infty\}$:

$$W_Z(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & \frac{x}{y^2} & \frac{1}{y^2} \\ \left(\frac{1}{y}\right)' & \left(\frac{x}{y^2}\right)' & \left(\frac{1}{y^2}\right)' \\ \left(\frac{1}{y}\right)'' & \left(\frac{x}{y^2}\right)'' & \left(\frac{1}{y^2}\right)'' \end{vmatrix} .$$

Sei $Q(x) := x(x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$. Dann gilt:

<u>NOTIZ 1.7.:</u> Für $Z \notin \{P_0, P_1, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}\}$ ist

$$W_Z(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{2(Q')^2 - 3Q''Q}{Q^3 \cdot y} .$$

Insbesonders sind dann also die Weierstraß-Punkte von V, die nicht in $\{P_0, P_1, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, P_\infty\}$ liegen, genau die Nullstellen von $3Q''Q - 2(Q')^2$.

<u>BEWEIS:</u> Man erhält wegen $y' = \frac{Q'}{3y^2}$:

a) $\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{-Q'}{3y^4}$,

b) $$\left(\frac{1}{y}\right)'' = -\left(\frac{Q'}{3y^4}\right)' = -\left(\frac{Q''\cdot 3y^4 - 12y^3\cdot y'\cdot Q'}{9y^8}\right) =$$

$$-\left(\frac{3Q''y^4 - 12y^3\frac{(Q')^2}{3y^2}}{9y^8}\right) = \frac{4(Q')^2 - 3Q''Q}{9y^7},$$

c) $$\left(\frac{1}{y^2}\right)' = \frac{-2y\frac{Q'}{3y^2}}{y^4} = -\frac{2Q'}{3y^5},$$

d) $$\left(\frac{1}{y^2}\right)'' = -\frac{2}{3}\left(\frac{Q'}{y^5}\right)' = -\frac{2}{3}\left(\frac{Q''y^5 - 5y^4\cdot\frac{Q'}{3y^2}\cdot Q'}{y^{10}}\right) =$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{3Q''y^5 - 5y^2(Q')^2}{3y^{10}}\right) = \frac{10(Q')^2 - 6Q''Q}{9y^8},$$

e) $$\left(\frac{x}{y^2}\right)' = \left(x\cdot\frac{1}{y^2}\right)' \overset{[\text{mit c)}]}{=} \frac{1}{y^2} - \frac{2xQ'}{3y^5},$$

f) $$\left(\frac{x}{y^2}\right)'' = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2xQ'}{3y^5}\right)' \overset{[\text{mit c)}]}{=} -\frac{2Q'}{3y^5} + \left(x\left(-\frac{2Q'}{3y^5}\right)\right)'$$

$$\overset{[\text{mit d)}]}{=} -\frac{2Q'}{3y^5} - \frac{2Q'}{3y^5} + \frac{10x(Q')^2 - 6xQ''Q}{9y^8}$$

$$= -\frac{4Q'}{3y^5} + \frac{10x(Q')^2 - 6xQ''Q}{9y^8}.$$ Also gilt:

$$W_Z(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \frac{x}{y^2}\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{y} & \frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ \left(\frac{1}{y}\right)' & \frac{y}{x}\left(\frac{1}{y^2}\right)' & y\left(\frac{1}{y^2}\right)' \\ \left(\frac{1}{y}\right)'' & \frac{y}{x}\left(\frac{1}{y^2}\right)'' & y\left(\frac{1}{y^2}\right)'' \end{vmatrix} \underset{=}{[a)-f)]}$$

$$\frac{x}{y^2}\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{y} & \frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ -\frac{Q'}{3y^4} & \frac{y}{x}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2xQ'}{3y^5}\right) & y\left(-\frac{2Q'}{3y^5}\right) \\ \frac{4(Q')^2-3Q''Q}{9y^7} & \frac{y}{x}\left(-\frac{4Q'}{3y^5}+\frac{10x(Q')^2-6xQ''Q}{9y^8}\right) & y\left(\frac{10(Q')^2-6Q''Q}{9y^8}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x}{y^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{Q'}{3y^4} & \frac{1}{yx} & \frac{-2Q'}{3y^4} \\ \frac{-6(Q')^2+3Q''Q}{9y^7} & \frac{-4Q'}{3xy^4} & \frac{10(Q')^2-6Q''Q}{9y^7} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{x}{Q}\left[\frac{Q'}{3y^4}\cdot\frac{(-4Q')}{3xy^4} - \frac{1}{yx}\left(\frac{-6(Q')^2+3Q''Q}{9y^7}\right)\right] =$$

$$= \frac{-4(Q')^2 + 6(Q')^2 - 3Q''Q}{Qy^8} = \frac{2(Q')^2 - 3Q''Q}{Q^3 y} . \square$$

Man betrachte Q als Polynom in einer komplexen Unbestimmten. Ersichtlich besitzt dann das komplexe Polynom $H(x) := 3Q(x)Q''(x) - 2(Q'(x))^2$ den Grad 6.

Für das Gewicht w_P eines Weierstraß-Punktes P auf einer kompakten nicht-hyperelliptischen Riemannschen Fläche R vom Geschlecht 3 gilt: $w_P \leq 2$ [s. Iitaka[1]; Theorem 6.12. (ii), S. 223].

Da V nach Notiz 1.5. nicht hyperelliptisch ist, folgt, daß das Maximalgewicht eines Weierstraß-Punktes auf V gleich 2 ist. Hieraus folgt, daß H keine n-fachen Nullstellen mit $n \geq 3$ haben kann.

Das Gesamtgewicht aller Weierstraß-Punkte auf V ist $(g-1)g(g+1) = 24$.

Analoges gilt natürlich auch für $V' := V(\mathcal{D}')$.

<u>Fall 1:</u> $H(x)$ besitze genau 6 verschiedene Nullstellen.

Dies ergibt 18 neue Weierstraß-Punkte $W_1, \dots, W_{18}$ auf V. Um auf das Gesamtgewicht 24 zu kommen, müssen alle diese Weierstraß-Punkte das Gewicht 1 besitzen. P_∞ ist somit der einzige Weierstraß-Punkt vom Gewicht 2 auf V. Nach Notiz 1.6. gilt

dann für jede biholomorphe Abbildung $f: V \to V'$:
$f(P_\infty) = Q_\infty$.

<u>Fall 2:</u> $H(x)$ besitze genau eine doppelte Nullstelle.

Dies ergibt 15 neue Weierstraß-Punkte $W_1, \dots, W_{15}$, von denen zwölf das Gewicht 1 und drei das Gewicht 2 haben müssen, um auf das Gesamtgewicht 24 zu kommen. Die drei Weierstraß-Punkte vom Gewicht 2 seien W_1, W_2, W_3. Sei wieder

$$K_3 = \{\tilde{\eta}^j : V \ni (x,y) \mapsto (x, \eta^j y) \in V \mid \eta = e^{\frac{2\pi i}{3}},\ j = 0,1,2\}$$

die Decktransformationsgruppe von V bzgl. x. Trivial ist

<u>NOTIZ 1.8.:</u> Die nicht-trivialen Decktransformationen $\tilde{\eta}^j$ besitzen genau $P_0, P_1, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, P_\infty$ als Fixpunkt. □

O.B.d.A. gelte

(4): $\tilde{\eta}^1(W_1) = W_2$, $\tilde{\eta}^1(W_2) = W_3$, $\tilde{\eta}^1(W_3) = W_1$.

Sei nun $f: V \to V'$ biholomorph. Nach Notiz 1.6. gilt $f(Z_1) = Q_\infty$ für einen Weierstraß-Punkt Z_1 vom Gewicht 2. Ist $Z_1 = P_\infty$, so ist alles klar.

Sei $Z_1 \neq P_\infty$

Bezeichne $\tilde{K}_3$ die K_3 entsprechende Decktransformationsgruppe auf V'. Weiter seien Z, Z' zwei von Q_∞ verschiedene Weierstraß-Punkte vom Gewicht 2 auf V' mit $f(P_\infty) = Z$ und $\tau(Z) = Z'$ für eine nicht-triviale Decktransformation $\tau \in \tilde{K}_3$. Ein solches τ existiert wegen (4). Für den Automorphismus $h := f^{-1} \circ \tau \circ f \in Aut(V)$ gilt dann: $h(P_\infty) = f^{-1}(\tau(Z)) = f^{-1}(Z') \neq P_\infty$. Wegen (4) sieht man, daß es ein $j \in \{0,1,2\}$ gibt mit $\tilde{\eta}^j(h(P_\infty)) = Z_1$. Für die biholomorphe Abbildung $s := f \circ \tilde{\eta}^j \circ h : V \to V'$ gilt dann $s(P_\infty) = Q_\infty$. Damit ist Fall 2 erledigt.

<u>Fall 3:</u> $H(x)$ besitze genau zwei doppelte Nullstellen.

Dies ergibt genau zwölf neue Weierstraß-Punkte $W_1, \dots, W_{12}$, von denen sechs, etwa $W_1, \dots, W_6$, das Gewicht 1 und die sechs anderen, $W_7, \dots, W_{12}$ das Gewicht 2 haben müssen, um auf das Gesamtgewicht 24 zu kommen.

Unter Beachtung von $\tilde{\eta}^3 = id$ kann man O.B.d.A. annehmen:

$$(5) \quad \begin{aligned} &\tilde{\eta}^1(W_1) = W_2, \ \tilde{\eta}^1(W_2) = W_3, \ \tilde{\eta}^1(W_3) = W_1 \\ &\tilde{\eta}^1(W_4) = W_5, \ \tilde{\eta}(W_5) = W_6, \ \tilde{\eta}^1(W_6) = W_4. \end{aligned}$$

Sei nun $f: V \to V'$ biholomorph. Ist $f(P_\infty) = Q_\infty$, so ist alles klar. Es gelte also $f(W_i) = Q_\infty$ für ein $i \in \{1, \dots, 6\}$. Wie in Fall 2 folgt die Existenz eines Automorphismus $h \in Aut(V)$, für den O.B.d.A. gelte: $h(P_\infty) = W_1$.

Aus Notiz 1.6. folgt unmittelbar, daß $Aut(V)$ kanonisch auf der Menge der Weierstraß-Punkte vom Gewicht 2 operiert.

Wegen (5) und $h(P_\infty) = W_1$ sieht man sofort, daß der P_∞-Orbit $\mathcal{O}_{P_\infty}$ zumindest die Punkte W_1, W_2, W_3 und P_∞ enthält.
Wegen $h(P_\infty) = W_1$ muß h einen der Weierstraß-Punkte W_j für ein $j \in \{1,2,3\}$ auf einen der Weierstraß-Punkte W_k für ein $k \in \{4,5,6\}$ abbilden.
O.B.d.A. gelte $h(W_j) = W_4$. Somit enthält wegen (5) der W_j-Orbit $\mathcal{O}_{W_j}$ zumindest die Punkte W_j, W_4, W_5, W_6.
Zwei Orbits sind aber entweder gleich oder disjunkt.
Wegen $W_j \in \mathcal{O}_{P_\infty} \cap \mathcal{O}_{W_j}$ gilt also: $\mathcal{O}_{P_\infty} = \mathcal{O}_{W_j}$.
Daraus folgt: $\mathcal{O}_{P_\infty} = \{W_1, \ldots, W_6, P_\infty\}$. Also gibt es ein $s \in Aut(V)$ mit $s(P_\infty) = W_i$. Für die biholomorphe Abbildung $f \circ s : V \longrightarrow V'$ gilt dann $(f \circ s)(P_\infty) = Q_\infty$. Damit ist Fall 3 erledigt.

<u>Fall 4:</u> $H(x)$ besitze genau drei doppelte Nullstellen.

Dies ergibt neun neue Weierstraß-Punkte $W_1, \ldots, W_9$.
Da das Gesamtgewicht 24 ist, müssen alle diese Weierstraß-Punkte das Gewicht 2 besitzen.

Unter Berücksichtigung von $\tilde{\eta}^3 = id$ gelte O.B.d.A.:

$\tilde{\eta}^1(W_1) = W_2$; $\tilde{\eta}^1(W_2) = W_3$; $\tilde{\eta}^1(W_3) = W_1$;

$\tilde{\eta}^1(W_4) = W_5$; $\tilde{\eta}^1(W_5) = W_6$; $\tilde{\eta}^1(W_6) = W_4$;

$\tilde{\eta}^1(W_7) = W_8$; $\tilde{\eta}^1(W_8) = W_9$; $\tilde{\eta}^1(W_9) = W_7$.

Sei $f : V \to V'$ biholomorph. Gilt $f(P_\infty) = Q_\infty$, so ist bereits alles klar.

Es gelte nun $f(W_i) = Q_\infty$ für ein $i \in \{1, \dots, 9\}$. Wie in Fall 2 folgt die Existenz eines $h \in Aut(V)$ und eines $\ell \in \{1, \dots, 9\}$ mit $h(P_\infty) = W_\ell$. Nach eventueller Umnumerierung kann man o.B.d.A. $W_\ell = W_1$ annehmen.

$Aut(V)$ operiere wieder kanonisch auf der Menge der Weierstraß-Punkte vom Gewicht 2.

Es folgt unmittelbar, daß der P_∞-Orbit $\mathcal{O}_{P_\infty}$ zumindest die Punkte W_1, W_2, W_3, P_∞ enthält.
Wegen $h(P_\infty) = W_1$ muß es ein $j \in \{1, 2, 3\}$ und ein $k \in \{4, \dots, 9\}$ geben mit $h(W_j) = W_k$. O.B.d.A. gelte $h(W_j) = W_4$. Es folgt, daß der W_j-Orbit $\mathcal{O}_{W_j}$ zumindest die Punkte W_j, W_4, W_5, W_6 enthält.
Es ist $\mathcal{O}_{P_\infty} \cap \mathcal{O}_{W_j} \neq \emptyset$. Daraus folgt, daß $\mathcal{O}_{P_\infty}$ mindestens die Punkte $W_1, \dots, W_6, P_\infty$ enthält.

<u>Fall 4-a):</u> $W_i \in \mathcal{O}_{P_\infty}$.

Dann gibt es ein $s \in Aut(V)$ mit $s(P_\infty) = W_i$. Die biholomorphe Abbildung $f \circ s$ bildet dann P_∞ auf Q_∞ ab

<u>Fall 4-b):</u> $W_i \notin \mathcal{O}_{P_\infty}$. Es wird gezeigt werden, daß dieser Fall nicht eintreten kann.

Man kann O.B.d.A. $W_i = W_7$ annehmen. Sei τ die $\tilde{\eta}^1$ entsprechende Decktransformation auf V'. Für die Automorphismen $f^{-1} \circ \tau \circ f$ und $f^{-1} \circ \tau^2 \circ f$ gilt dann: $f^{-1} \circ \tau \circ f(W_7) = f^{-1} \circ \tau(Q_\infty) = f^{-1}(Q_\infty)$ $= W_7$ und ebenso $f^{-1} \circ \tau^2 \circ f(W_7) = W_7$. Da die Verzweigungspunkte $P_0, P_1, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}$ die einzigen Weierstraß-Punkte vom Gewicht 1 auf V sind, folgt weiter für $P \in \{P_0, P_1, P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}\}$: $f^{-1} \circ \tau \circ f(P) =$ $f^{-1} \circ \tau(Z)$ für einen Weierstraß-Punkt Z vom Gewicht 1 auf V', d.h. einem Verzweigungspunkt. Also folgt mit Notiz 1.8.: $f^{-1} \circ \tau(Z) = f^{-1}(Z) = P$. Analog folgt: $f^{-1} \circ \tau^2 \circ f(P) = P$.

Damit hat man bereits fünf Fixpunkte der Automorphismen $f^{-1} \circ \tau \circ f$ und $f^{-1} \circ \tau^2 \circ f$ gefunden.

Wegen $W_7 \notin \mathcal{O}_{P_\infty}$ und $\tilde{\eta}^1(W_7) = W_8$, $\tilde{\eta}^2(W_7) = W_9$ folgt: $f^{-1} \circ \tau \circ f(W_8) \in \{W_8, W_9\}$ und $f^{-1} \circ \tau^2 \circ f(W_9) \in \{W_8, W_9\}$.

<u>Annahme:</u> $f^{-1} \circ \tau \circ f(W_8) = W_8$. Dann gilt auch $f^{-1} \circ \tau \circ f(W_9) = W_9$.

Dies bedeutet, daß der nicht-triviale Automorphismus $f^{-1}\circ\tau\circ f$ mehr als sechs Fixpunkte besitzt. Da V das Geschlecht $g=3$ besitzt und V nach Notiz 1.5. nicht hyperelliptisch ist, ergibt dies einen Widerspruch, denn auf einer kompakten nicht-hyperelliptischen Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g\geqslant 3$ kann ein nicht-trivialer Automorphismus nie mehr als $2\cdot g$ Fixpunkte besitzen [s. Iitaka S. [1]; Theorem 6.14(iii), S. 224].

<u>Annahme:</u> $f^{-1}\circ\tau\circ f(W_8) = W_9$.

Gilt dann $f^{-1}\circ\tau^2\circ f(W_8)=W_8$, so gilt auch $f^{-1}\circ\tau^2\circ f(W_9) = W_9$, d.h., der nicht-triviale Automorphismus $f^{-1}\circ\tau^2\circ f$ besitzt mehr als sechs Fixpunkte. Widerspruch.

Gilt $f^{-1}\circ\tau^2\circ f(W_8)=W_9$, so folgt $f^{-1}\circ\tau\circ f(W_8)= f^{-1}\circ\tau^2\circ f(W_8)$, d.h.: $\tau\circ f(W_8) = \tau^2\circ f(W_8)$. Wegen $\tau^{-1}=\tau^2$ folgt $f(W_8) = \tau\circ f(W_8)$. Wegen $f(W_7) = Q_\infty$ ist dann also $f(W_8)$ ein Fixpunkt von τ, der kein Verzweigungspunkt ist. Widerspruch zu Notiz 1.8.

Fall 4-b) kann also nicht eintreten. Damit ist auch Fall 4 erledigt. Mehr Fälle gibt es nicht. Somit ist Lemma 1.1. bewiesen. □

Sei R eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht

g. Für einen Divisor D auf R bezeichne $L(D)$ den komplexen Vektorraum $\{f \in Mer(R) \mid (f) - D \geq 0\} \cup \{0\}$ und $l(D)$ die Dimension dieses Raums. Weiter bezeichne $i(D)$ den Spezialitätsindex von D, also die Dimension des komplexen Vektorraums $\{\omega \mid \omega$ meromorphe Differentialform auf R mit $(\omega) - D \geq 0\} \cup \{0\}$. Mit diesen Bezeichnungen lautet der

<u>SATZ von RIEMANN-ROCH:</u>
$l(-D) = \text{grad } D - g + 1 + i(D)$. □

Weiter gilt

<u>SATZ 1.3.:</u> [s. Farkas H. M./Kra I. [1]; Corollary 2, S. 107]
Ist D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche R vom Geschlecht g mit $0 \leq \text{grad } D \leq 2g-2$, so gilt: $i(D) \leq g - \frac{\text{grad } D}{2}$. □

In der Situation von Beispiel 1.3. ist $g = 3$. Für den Divisor $3P_\infty$ auf $V = V(D)$ gilt $\text{grad } 3P_\infty = 3$. Somit gilt nach dem Satz von Riemann-Roch:

(6) $l(-3P_\infty) = 3 - 3 + 1 + i(3P_\infty) = 1 + i(3P_\infty)$.

Wegen $x \in L(-3P_\infty)$ gilt $l(-3P_\infty) \geq 2$, woraus mit (6) folgt: $i(3P_\infty) \geq 1$. Da für $3P_\infty$ zusätzlich gilt: $0 < 3 = \text{grad } 3P_\infty < 4 = 2g-2$, folgt mit Satz 1.3.: $i(3P_\infty) \leq g - \frac{\text{grad } 3P_\infty}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Mithin gilt: $i(3P_\infty) = 1$ und dadurch folgt: $\ell(-3P_\infty) = 2$

(7): $\{1, x\}$ ist also eine Basis von $L(-3P_\infty)$.

Es gilt nun weiter:

LEMMA 1.2.: Sei $f: V(\mathcal{D}) \to V(\mathcal{D}')$ biholomorph mit $f(P_\infty) = Q_\infty$. Dann gilt:

(i) Es gibt genau einen Automorphismus $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V(\mathcal{D}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & V(\mathcal{D}') \arrow[d, "x"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "B"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}.$$

(ii) Für den Automorphismus B aus (i) gilt:
$B(\infty) = \infty$ und $B(\{0, 1, \alpha_1, \alpha_2\}) = \{0, 1, \beta_1, \beta_2\}$.

BEWEIS: Ein f wie in Lemma 1.2. existiert wegen Lemma 1.1.

zu (i): Da f biholomorph ist mit $f(P_\infty) = Q_\infty$, gilt $x \circ f \in L(-3P_\infty)$. Wegen (7) gibt es komplexe Zahlen λ, μ mit $x \circ f = \lambda x + \mu$. Da $x \circ f$ nicht konstant ist, gilt $\lambda \neq 0$. Hieraus folgt (i).

zu (ii): $B(\infty) = \infty$ ist klar. Der Rest folgt aus dem nächsten Satz. $\square$

<u>SATZ 1.4.:</u> Im Fall $p=3$ und $m=5$ bleibt die Aussage von Theorem 1.1. gültig.

<u>BEWEIS:</u> $V(\mathcal{D})$ und $V(\mathcal{D}')$ seien biholomorph äquivalent. Nach Lemma 1.1. gibt es eine biholomorphe Abbildung $f: V(\mathcal{D}) \to V(\mathcal{D}')$ mit $f(P_\infty) = Q_\infty$. Lemma 1.2. (i) liefert die Existenz eines $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}$ mit $B \circ x = x \circ f$. Damit ist man an der Stelle (*) des Beweises zu Theorem 1.1., womit Satz 1.4. bewiesen ist.

Nach Lemma 1.2. (ii) gilt für den Automorphismus B: $B(\infty) = \infty$. Gemäß (3) im Beweis zu Theorem 1.1. gibt es dann ein $r \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$ mit $r\mathcal{D} = B^{-1}(\mathcal{D}')$. Wegen $B(\infty) = \infty$ folgt $B(\{0,1,\alpha_1,\alpha_2\}$ $= \{0,1,\beta_1,\beta_2\}$. Damit ist auch Teil (ii) von Lemma 1.2. vollständig bewiesen. □

<u>COROLLAR 1.1.:</u> Die Riemannschen Flächen

$$V(\mathcal{D}): y^3 = x(x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ ;\ \alpha_1 \neq \alpha_2,\ \alpha_i \notin \{0,1\} \text{ und}$$

$$V(\mathcal{D}'): y^3 = x(x-1)(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ ;\ \beta_1 \neq \beta_2,\ \beta_i \notin \{0,1\}$$

sind genau dann biholomorph äquivalent, wenn (β_1,β_2) oder (β_2,β_1) ein Element der folgenden Menge ist:

$$\Big\{(\alpha_1,\alpha_2),\ (1-\alpha_1,\ 1-\alpha_2),\ \Big(\frac{1}{\alpha_1},\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big),\ \Big(\frac{1}{\alpha_2},\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\Big),$$
$$\Big(\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1},\ \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}\Big),\ \Big(\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2},\ \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2}\Big),\ \Big(\frac{1}{1-\alpha_1},\ \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\Big),$$

$$\left(\frac{1}{1-\alpha_2}, \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}\right), \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}, \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-1}\right), \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}, \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2-1}\right),$$
$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}, \frac{\alpha_1-1}{\alpha_1-\alpha_2}\right), \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}, \frac{\alpha_2-1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)\Big\}.$$

BEWEIS: Die biholomorphe Äquivalenz von $V(\mathcal{D})$ und $V(\mathcal{D}')$ ist nach Bemerkung 1.2. und Lemma 1.2.(ii) äquivalent zur Existenz eines $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ mit $B(\infty) = \infty$ und $B(\{0,1,\alpha_1,\alpha_2\}) = \{0,1,\beta_1,\beta_2\}$. Letzteres ist aber äquivalent dazu, daß (β_1,β_2) oder (β_2,β_1) ein Element der in Corollar 1.1. angegebenen Menge ist. Man bestätigt dies durch eine einfache Rechnung unter Benutzung der Tatsache, daß es zu paarweise verschiedenen $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{P}^1$ und paarweise verschiedenen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{P}^1$ genau ein $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ mit $A(w_i) = z_i$ gibt. □

Es wird nun die Gültigkeit von Theorem 1.2. untersucht. Es gilt der

SATZ 1.5.: Von allen Riemannschen Flächen V vom Typ

$$V: y^3 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \alpha_i \neq \alpha_j \text{ für } i \neq j$$

ist die Riemannsche Fläche

$$V: y^3 = x^4 - 1$$ bis auf biholomorphe Äquivalenz

die einzige, die einen Automorphismus f mit $f(P_\infty) \neq P_\infty$ besitzt. Weiter gilt: $\mathrm{ord}(\mathrm{Aut}(V)) = 48$

[s. Kuribayashi A. / Komiya K. [1]; S. 269, Theorem 2 und die anschließende Bemerkung.] □

Um zu zeigen, daß Theorem 1.2. im Fall $p = 3$, $m = 5$ nicht mehr gültig bleibt, wird die folgende Teilaussage von Satz 1.5. benötigt:

LEMMA 1.3.: Sei V die Riemannsche Fläche

$$V : y^3 = x^4 - 1 .$$

Die holomorphe Abbildung $T : V \to V$;

$$(x, y) \longmapsto \left(\sqrt{3} \cdot \frac{x}{y+1} , \frac{2-y}{y+1} \right)$$

ist ein involutorischer Automorphismus mit $T(P_\infty) \neq P_\infty$.

BEWEIS: Zur Wohldefiniertheit von T:

Sei $(x, y) \in V$. Dann gilt: $\left(\frac{2-y}{y+1}\right)^3 = \left(\frac{3}{y+1} - 1\right)^3 =$

$$\frac{27}{(y+1)^3} - \frac{27}{(y+1)^2} + \frac{9}{y+1} - 1 =$$

$$\frac{9}{y+1} \cdot \left(\frac{3(y+1) - 3(y+1)^2 + (y+1)^3}{(y+1)^3} \right) - 1 =$$

$$\frac{9}{y+1} \cdot \left(\frac{y^3 + 1}{(y+1)^3} \right) - 1 = \frac{9x^4}{(y+1)^4} - 1 = \left(\sqrt{3} \cdot \frac{x}{y+1} \right)^4 - 1 .$$

T ist also wohldefiniert.

Weiter gilt: $T(T(x,y)) =$

$$\left(\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{x}{y+1}}{\frac{2-y}{y+1}+1}\right), \frac{2-\left(\frac{2-y}{y+1}\right)}{\frac{2-y}{y+1}+1}\right) =$$

$$\left(\frac{\frac{3x}{y+1}}{\frac{3}{y+1}}, \frac{\frac{3y}{y+1}}{\frac{3}{y+1}}\right) = (x,y).$$

Also ist T ein involutorischer Automorphismus. Schließlich gilt ersichtlich $T(0,-1) = P_\infty$, d.h.: $T(P_\infty) \neq P_\infty$. $\square$

NOTIZ 1.9.: Gilt für eine Riemannsche Fläche $V(\mathcal{D})$ die Aussage von Theorem 1.2., so ist die Decktransformationsgruppe K von $V(\mathcal{D})$ bezüglich $x: V(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(V(\mathcal{D}))$.

BEWEIS: Klar, da dann K der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist. $\square$

Nun sind alle Vorbereitungen getroffen, um zu zeigen:

COROLLAR 1.2.: Im Fall $p=3$, $m=5$ ist die Aussage von Theorem 1.2. nicht mehr allgemeingültig.

BEWEIS: Sei V die Riemannsche Fläche $V: y^3 = x^4 - 1$

und T der involutorische Automorphismus aus Lemma 1.3. mit $T(0,-1) = P_\infty$. Wäre Theorem 1.2. für V gültig, so wäre nach Notiz 1.9. die Decktransformationsgruppe K_3 von V ein Normalteiler in $Aut(V)$. Sei τ ein Erzeugendes von K_3. Dann wäre also $T \circ \tau \circ T^{-1} \in K_3$. Wegen Notiz 1.8. und $T \circ \tau \circ T^{-1}(0,-1) = T \circ \tau \circ T(0,-1) = T \circ \tau(P_\infty) = T(P_\infty) = (0,-1)$ müßte dann $T \circ \tau \circ T^{-1} = id$ gelten. Nun ist aber $T \circ \tau \circ T^{-1}(P_\infty) = T \circ \tau(0,-1) \neq P_\infty$, da $\tau(0,-1) \neq (0,-1)$ gilt. Widerspruch! Damit ist Corollar 1.2. bewiesen. $\square$

Ist $V(\mathcal{D})$ nicht biholomorph äquivalent zu $V: y^3 = x^4 - 1$, so besitzt nach Satz 1.5. jedes $f \in Aut(V(\mathcal{D}))$ den Punkt P_∞ als Fixpunkt. Nach Lemma 1.2. (i) gibt es dann genau einen Automorphismus $B \in Aut(\mathbb{P}^1)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V(\mathcal{D}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & V(\mathcal{D}) \arrow[d, "x"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "B"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}.$$

Damit befindet man sich an der Stelle (* *) des Beweises zu Theorem 1.2. und erhält

<u>COROLLAR 1.3.:</u> Sei $p = 3$, $m = 5$, $\mathcal{D} \in \Gamma$ und $V(\mathcal{D})$

nicht biholomorph äquivalent zu $V: y^3 = x^4 - 1$.
Dann gilt für $V(\mathcal{D})$ die Aussage von Theorem 1.2. $\square$

Es werden jetzt einige Begriffe [1)] und Sätze aus der algebraischen Geometrie bereitgestellt, die des weiteren gelegentlich noch benötigt werden. Dies geschieht gerade an dieser Stelle, um anschließend zeigen zu können, daß sich im Fall $p = 3$, $m = 5$ jede biholomorphe Abbildung $f: V(\mathcal{D}) \to V(\mathcal{D}')$ als Restriktion einer eindeutig bestimmten projektiven Transformation $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ schreiben läßt.

Sei X eine singularitätenfreie projektive algebraische Kurve über $\mathbb{C}$ (kompakte Riemannsche Fläche), $\mathrm{Div}(X)$ die Menge der Divisoren auf X, und für $f \in \mathrm{Mer}(X)$ bezeichne (f) den Divisor von f. Für $\mathcal{D} \in \mathrm{Div}(X)$ und $L(-\mathcal{D}) \neq \{0\}$ sei $|\mathcal{D}|$ die Menge aller positiven Divisoren $(f) + \mathcal{D}$.

Eine Teilmenge $L \subset |\mathcal{D}|$ heißt <u>lineares System</u>, falls die Menge

$$V(L) := \{ f \in \mathrm{Mer}(X) \mid f = 0 \text{ oder } (f \neq 0 \text{ und } \mathcal{D} + (f) \in L) \}$$

ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. In diesem Fall heißt $V(L)$ der L zugeordnete Vektorraum.

---

zu 1): Zu den eingeführten Begriffen s. Mumford D. [1]; S. 96/97 und Hartshorne R. [1]; S. 341. Mumford schreibt $L(\mathcal{D})$ anstatt $L(-\mathcal{D})$!

Ein lineares System $L \subset |\mathcal{D}|$ mit grad $\mathcal{D} = n$ und $\dim V(L) = r+1$ wird (aus historischen Gründen) mit dem Symbol $\underline{g_n^r}$ bezeichnet und <u>lineares System der Ordnung n und Dimension r</u> genannt.

Ein g_n^r heißt <u>fixpunktfrei</u>, falls es nicht durch Addition eines Punktdivisors P_0 aus einem g_{n-1}^r hervorgeht.

$\mathbb{G}_n^r(X)$ bezeichne die Menge aller g_n^r auf X und $\mathbb{F}_n^r(X) \subset \mathbb{G}_n^r(X)$ die Menge aller fixpunktfreien g_n^r auf X.

Die linearen Systeme $|\mathcal{D}|$ heißen <u>vollständig</u>.

Der zu $|\mathcal{D}|$ gehörige Vektorraum $V(|\mathcal{D}|)$ ist also gleich $L(-\mathcal{D})$.

Mittels der Verknüpfung von Abbildungen operiert die Automorphismengruppe $Aut(\mathbb{P}^1)$ kanonisch auf $Mer_n(X)$.

Bezeichnet man weiter eine holomorphe Abbildung f einer projektiven komplexen Mannigfaltigkeit V nach $\mathbb{P}^r := \mathbb{P}^r(\mathbb{C})$, $r \geq 1$, als nicht-entartet, falls $f(V)$ in keiner Hyperebene von $\mathbb{P}^r$ enthalten ist und die Menge aller solchen holomorphen Abbildungen mit $Hol_{NE}(V, \mathbb{P}^r)$, so operiert die Automorphismengruppe $Aut(\mathbb{P}^\tau)$ ebenfalls kanonisch auf $Hol_{NE}(V,\mathbb{P}^\tau)$, weil für $f \in Hol_{NE}(V,\mathbb{P}^\tau)$ und $B \in Aut(\mathbb{P}^\tau)$ die Verknüpfung $B \circ f$ wieder nicht-entartet ist. [s. Namba M. [2]; S. 218]. Ist speziell V eine singularitätenfreie projektive algebraische Kurve über $\mathbb{C}$ (kompakte Riemannsche Fläche), so ist $f: V \to f(V)$ eine eigentliche Überlagerung der Bildkurve $f(V)$, und es gilt weiter [s. Namba M. [2]; S. 226]:

$Hol_{NE}(V,\mathbb{P}^\tau)$ läßt sich disjunkt zerlegen in

$$Hol_{NE}(V,\mathbb{P}^\tau) = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} Hol_{NE}(V,\mathbb{P}^\tau)_n \quad \text{mit}$$

$$Hol_{NE}(V,\mathbb{P}^\tau)_n := \{ f \in Hol_{NE}(V,\mathbb{P}^\tau) \mid n = \operatorname{ord} f \cdot \operatorname{grad} f(V) \},$$

wobei $\operatorname{ord} f$ die Ordnung von f, also die Blätterzahl $b(f)$ von f bezeichne und $\operatorname{grad} f$ den Grad von $f(V)$.

Auf die genaue Definition des <u>Grades einer Varietät</u> [s. Hartshorne R. [1]; S. 52] sei verzichtet, da für das Folgende lediglich benötigt wird:

<u>SATZ 1.6.:</u> [s. Hartshorne R. [1]; Proposition 7.6.(c),(d), S.52]

(a): $\operatorname{grad} \mathbb{P}^\tau = 1$.

(b): Wird eine Hyperfläche $H \subset \mathbb{P}^\tau$ durch ein irreduzibles homogenes Polynom vom Grad d definiert, so gilt: $\operatorname{grad} H = d$. Dabei ist d durch H eindeutig bestimmt. □

Ein irreduzibles Polynom wie in Satz 1.6.(b) gibt es zu jeder Hyperfläche $H \subset \mathbb{P}^{\tau}$, da Hyperflächen bereits per definitionem irreduzibel sind [s. Iitaka S. [1]; S.156].

Da sich die Ordnung von $f \in Hol_{NE}(V, \mathbb{P}^{\tau})_m$ durch Komposition mit einem $\mathbb{P}^{\tau}$-Automorphismus nicht ändert, operiert die Automorphismengruppe $Aut(\mathbb{P}^{\tau})$ auch noch kanonisch auf $Hol_{NE}(V, \mathbb{P}^{\tau})_m$.

Für die folgenden Betrachtungen ist folgendes Ergebnis über die Orbits $Hol_{NE}(V, \mathbb{P}^{\tau})_m / Aut(\mathbb{P}^{\tau})$ wesentlich:

<u>SATZ 1.7.:</u> [s. Namba M. [2]; S. 226]
$card(Hol_{NE}(V, \mathbb{P}^{\tau})_m / Aut(\mathbb{P}^{\tau})) = card(\mathbb{G}_m^{\tau}(V) - \mathbb{F}_m^{\tau}(V))$. □

Im Spezialfall $\tau = 1$ gilt, da f nicht-entartet und somit nicht-konstant ist: $f(V) = \mathbb{P}^1$. Nach Satz 1.6.(a) gilt $grad\, \mathbb{P}^1 = 1$, so daß man $Hol_{NE}(V, \mathbb{P}^1)_m = Mer_m(V)$ erhält und somit

<u>SATZ 1.7.*:</u>
$card(Mer_m(V)/Aut(\mathbb{P}^1)) = card(\mathbb{G}_m^1(V) - \mathbb{F}_m^1(V))$. □

<u>BEMERKUNG:</u> [s. Namba M. [2]; Theorem 4.4.2. und S. 226]
Satz 1.7. gilt in Wirklichkeit in einer weitaus tiefliegenderen Fassung. Sowohl die Orbits $Hol_{NE}(V, \mathbb{P}^{\tau})_m / Aut(\mathbb{P}^{\tau})$ als auch $\mathbb{G}_m^{\tau}(V)$ lassen sich so mit der Struktur komplexer Räume versehen, daß $\mathbb{F}_m^{\tau}(V)$ ein abgeschlossener komplexer Unterraum von $\mathbb{G}_m^{\tau}(V)$ ist und

$Hol_{NE}(V, \mathbb{P}^\tau)_m / Aut(\mathbb{P}^\tau)$ biholomorph äquivalent zu $\mathbb{G}^\tau_m(V) - \mathbb{F}^\tau_m(V)$ ist. $\square$

Für eine singularitätenfreie projektive algebraische Kurve (kompakte Riemannsche Fläche) X vom Geschlecht d definiert man das <u>kanonische lineare System K</u> simultan durch $K := |(\omega)|$ für alle nicht-trivialen meromorphen Differentialformen auf X.

Daß K wohldefiniert ist, kann man wie folgt einsehen. Sind ω_1, ω_2 zwei nicht-triviale meromorphe Differentialformen auf X, so bestimmt ω_1/ω_2 eine meromorphe Funktion $f \in Mer(X) - \{0\}$, d.h.: $(\omega_1) - (\omega_2)$ ist ein Hauptdivisor. Ist nun $h \in Mer(X) - \{0\}$ und $(h) + (\omega_1) \in |(\omega_1)|$, so gilt: $(h) + (\omega_1) = (h) + (\omega_1) - (\omega_2) + (\omega_2) = (h) + (f) + (\omega_2) = (hf) + (\omega_2) \in |(\omega_2)|$. Analog folgt $|(\omega_2)| \subset |(\omega_1)|$. K ist also wohldefiniert.

Sei ω eine fest gewählte, nicht-triviale meromorphe Differentialform auf X. Da das kanonische lineare System K vollständig ist, gilt für den zugehörigen Vektorraum $V(K) = L(-K) := L(-(\omega))$. Wegen $\dim L(-K) = d$ [s. Ahlfors L.V./Sario L. [1]; S. 325; 26 C] und $\operatorname{grad} K := \operatorname{grad}(\omega) = 2d - 2$ ist also K ein g^{d-1}_{2d-2}. Nun gibt es aber auf X nur ein einziges g^{d-1}_{2d-2}. [s. Walker R.J. [1]; Theorem 6.10., S. 185]. Mithin gilt:

SATZ 1.8.: Hat X das Geschlecht d, so gilt: $\mathbb{G}^{d-1}_{2d-2}(X) = \{K$

Für eine kompakte nicht-hyperelliptische Riemannsche Fläche X vom Geschlecht d sei $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ eine Basis von $\Omega(X)$. Um jedes $a \in X$ gibt es dann eine lokale Darstellung $\omega_i = h_i^{(a)} dz_a$ mit einer Karte z_a und holomorphen Funktionen $h_i^{(a)}$. Die Abbildung

$$X \ni a \overset{\Phi}{\longmapsto} (h_1^{(a)}(a) : \dots : h_d^{(a)}(a)) \in \mathbb{P}^{d-1}$$

ist dann wohldefiniert und definiert eine biholomorphe Abbildung $\Phi : X \to \Phi(X) \subset \mathbb{P}^{d-1}$ [s. Mumford D. [2]; S. 10/11

$\Phi(X)$ ist eine singularitätenfreie Kurve vom algebraisch-geometrischen Grad $2d-2$ [s. Mumford D. [2]; S. 11], die als kanonische Kurve von X (oder auch Hauptkurve von X) bezeichnet wird. Die kanonische Kurve von X ist bis auf eine projektive Transformation $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{d-1})$ eindeutig bestimmt. [s. Gunning R. C. [1]; S. 260]

Seien nun X, X' kompakte nicht-hyperelliptische Riemannsche Flächen vom Geschlecht 3. Die kanonische Kurve C_X von X besitzt dann den algebraisch-geometrischen Grad 4. Da C_X eine Kurve in $\mathbb{P}^{3-1} = \mathbb{P}^2$ ist, ist C_X eine Hyperfläche in $\mathbb{P}^2$ und besitzt daher nach Satz 1.6. (b) ein definierendes irreduzibles homogenes Polynom vom

Grad 4. Analoges gilt für X'.

Sei nun $e_X : X \to C_X$ (bzw. $e_{X'} : X' \to C_{X'}$) eine Einbettung von X (bzw. X') als kanonische Kurve in $\mathbb{P}^2$ mittels einer festen Basis von holomorphen Differentialformen. Weiter sei $f : X \to X'$ biholomorph. Dann ist auch $h := e_{X'} \circ f \circ e_X^{-1} : C_X \to C_{X'}$ biholomorph. Da h die Ordnung 1 besitzt und $\operatorname{grad} C_X = 4$ gilt, folgt $h \in Hol_{NE}(C_{X'}, \mathbb{P}^2)_4$. Satz 1.8. liefert: $\mathbb{G}_4^2(C_X) = \{K\}$ und $\mathbb{G}_4^2(C_{X'}) = \{K'\}$, wobei K' das kanonische lineare System auf $C_{X'}$ bezeichne. Weiter gilt nach Satz 1.7.:
$Hol_{NE}(C_X, \mathbb{P}^2)_4 / Aut(\mathbb{P}^2) \approx \mathbb{G}_4^2(C_X) - \mathbb{F}_4^2(C_X)$.
Wegen $Hol_{NE}(C_X, \mathbb{P}^2)_4 \neq \emptyset$ und $\mathbb{G}_4^2(C_X) = \{K\}$ ist $\mathbb{F}_4^2(C_X) = \emptyset$. Mithin gilt: $Hol_{NE}(C_X, \mathbb{P}^2)_4 / Aut(\mathbb{P}^2)$ besteht aus genau einem Orbit. Also gibt es ein $B \in Aut(\mathbb{P}^2)$ mit $h = B_{|C_X}$, d.h.: $e_{X'} \circ f = B \circ e_X$.
Das folgende Diagramm kommutiert also:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "e_X"'] & X' \arrow[d, hook, "e_{X'}"] \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, "B"] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}.$$

Nun gilt:

<u>SATZ 1.9.:</u> [s. Hartshorne R. [1]; Example 7.1.1, S.151]

Die Automorphismen von $\mathbb{P}^r$ sind genau die projektiven Transformationen. □

Identifiziert man also X und X' mit ihren kanonischen Kurven C_X und $C_{X'}$, so liefern Satz 1.9 und die Kommutativität des obigen Diagramms, daß f die Restriktion einer projektiven Transformation $B : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ ist.

Diese projektive Transformation B ist sogar eindeutig bestimmt. Dies folgt unmittelbar aus folgendem Satz:

<u>SATZ 1.10.:</u> [s. Namba M. [2]; S. 220]
Sei V eine projektive komplexe Mannigfaltigkeit. Dann operiert $Aut(\mathbb{P}^r)$ frei auf $Hol_{NE}(V, \mathbb{P}^r)$. □

Für die Riemannsche Fläche X besagt der Satz, daß für jedes $g \in Hol_{NE}(X, \mathbb{P}^2)$ der Stabilisator $\{E \in Aut(\mathbb{P}^2) \mid E \circ g = g\}$ trivial, also gleich $\{id_{\mathbb{P}^2}\}$ ist.

Ist nun B' eine weitere projektive Transformation mit $e_{X'} \circ f = B' \circ e_X$, so folgt: $e_{X'} = B' \circ e_X \circ f^{-1}$ $\Leftrightarrow B'^{-1} \circ e_{X'} = e_X \circ f^{-1}$. Zusammen mit $e_{X'} \circ f = B \circ e_X$ bedeutet dies, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "e_X"'] & X' \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, hook, "e_{X'}"'] & X \arrow[d, hook, "e_X"'] \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, "B"] & \mathbb{P}^2 \arrow[r, "B'^{-1}"] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

Man erhält: $B'^{-1} \circ B \circ e_X = B'^{-1} \circ e_{X'} \circ f = e_X \circ f^{-1} \circ f = e_X \circ id_X = e_X$. Daraus folgt mit Satz 1.10.: $B'^{-1} \circ B = id_{\mathbb{P}^2}$, d.h.: $B = B'$. Damit ist bewiesen:

<u>SATZ 1.11:</u> Seien X, X' kompakte nicht-hyperelliptische Riemannsche Flächen vom Geschlecht 3, die mit ihren kanonischen Kurven $C_X, C_{X'}$ identifiziert werden. Dann ist jede biholomorphe Abbildung $f: X \longrightarrow X'$ die Restriktion einer eindeutig bestimmten projektiven Transformation $B \in Aut(\mathbb{P}^2)$.
Insbesonders gilt dies für die Riemannschen Flächen aus Beispiel 1.3. $\square$

<u>BEISPIEL 1.4.:</u> Sei $p = 3$ und $m = 6$.

Dann ist die Bedingung $m \geq 2p+1$ aus den Theoremen 1.1./1.2. wieder verletzt. Es wird sich jedoch zeigen, daß Theorem 1.1. wieder gültig bleibt. Theorem 1.2. jedoch verliert seine Allgemeingültigkeit.

Sei $\mathcal{D} = k_1(\alpha_1) + \cdots + k_6(\alpha_6) \in \Gamma$. Es gilt $k_i \not\equiv 0 \pmod 3$ und $k_1 + \cdots + k_6 \equiv 0 \pmod 3$. Man kann sofort $k_i \in \{1, 2\}$ annehmen. Wegen $k_1 + \cdots + k_6 \equiv 0 \pmod 3$ folgt: $k_1 + \cdots + k_6 \in \{6, 9, 12\}$.

Ist $k_1 + \cdots + k_6 = 12$, so sind alle k_i gleich 2. Multiplikation mit $2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$ liefert, daß dann $\mathcal{D}$ mod G äquivalent zu einer Divisorenklasse $\mathcal{D}' = \ell_1(\alpha_1) + \cdots + \ell_6(\alpha_6)$ mit $\ell_1 = \cdots = \ell_6 = 1$ ist. Man kann also in diesem Fall sofort $k_1 + \cdots + k_6 = 6$ annehmen.

Dies bedeutet (elementar gesehen) für die Gleichung der Riemannschen Fläche $V(\mathcal{D})$ auch folgendes:

$$y^3 = \prod_{j=1}^{6} (x - \alpha_j)^2 \iff y^3 = \frac{\prod_{j=1}^{6} (x - \alpha_j)^3}{\prod_{j=1}^{6} (x - \alpha_j)}$$

$$\iff \prod_{j=1}^{6} (x - \alpha_j) = \left(\frac{\prod_{j=1}^{6} (x - \alpha_j)}{y} \right)^3 .$$

Mit der Substitution $y' = \dfrac{\prod_{j=1}^{6} (x - \alpha_j)}{y}$

geht die letzte Gleichung dann über in

$$\prod_{j=1}^{6} (x - \alpha_j) = y'^3 .$$

Man erhält also insgesamt zwei Typen Riemannscher Flächen :

(I): $V(D): y^3 = (x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_6)$ und

(II) : $V(D): y^3 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2(x-\beta_3)^2$

mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_6$ bzw. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$.

Das Geschlecht der Riemannschen Flächen $V(D)$ ist wegen $k_1+\cdots+k_6 \equiv 0 \pmod 3$ gleich $(p-1)(m-2)/2 = 4$ und $x : V(D) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ verzweigt nicht über ∞.

<u>NOTIZ 1.10 :</u> Die Riemannschen Flächen $V(D)$ vom Typ (I) bzw. Typ (II) sind nicht hyperelliptisch.

<u>BEWEIS :</u> $V(D)$ besitzt das Geschlecht $g = 4$ und es gilt $x \in \mathrm{Mer}_3(V(D))$. Also ist $V(D)$ nicht hyperelliptisch. [s. Satz auf S. 47] $\square$

Auf die Riemannschen Flächen $V(D)$ vom Typ (I) bzw. (II) läßt sich folgender Satz anwenden.

<u>SATZ 1.12:</u> [s. Farkas H.M./Kra I. [1]; Theorem 8.7.1 S. 109]
Sei V eine kompakte nicht-hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g=4$. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

<u>a)</u> Es gibt ein $f \in Mer_3(V)$, so daß $(f)=\mathcal{D}_1-\mathcal{D}_2$ gilt mit positiven Divisoren $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$, wobei $2\mathcal{D}_2$ kanonisch ist. Zu jeder weiteren Funktion $h \in Mer_3(V)$ gibt es dann einen Automorphismus $B \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $h = B \circ f$.

<u>b)</u> Es gibt zwei meromorphe Funktionen f_1, f_2 der Ordnung 3 auf V, so daß für alle Automorphismen $B \in Aut(\mathbb{P}^1)$ gilt $f_1 \neq B \circ f_2$ und jede meromorphe Funktion f der Ordnung 3 ist entweder in $\{B \circ f_1 \mid B \in Aut(\mathbb{P}^1)\}$ oder in $\{B \circ f_2 \mid B \in Aut(\mathbb{P}^1)\}$. $\square$

Satz 1.12 besitzt ein interessantes algebraisch-geometrisches Pendant. Eine kompakte nicht-hyperelliptische Riemannsche Fläche V vom Geschlecht $g=4$ läßt sich mit ihrer kanonischen Kurve $C_V \subset \mathbb{P}^{4-1} = \mathbb{P}^3$, die singularitätenfrei und vom algebraisch-geometrischen

Grad $2g-2=6$ ist, identifizieren. Es gilt dann

<u>SATZ 1.12* :</u> [s. Hartshorne R. [1]; Example 5.2.1, S. 342 und Example 5.5.2, S. 346]

Sei V eine kompakte nicht-hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g=4$, die mit ihrer kanonischen Kurve $C_V \subset \mathbb{P}^3$ identifiziert werde. V ist dann der Durchschnitt einer eindeutig bestimmten irreduziblen Quadrik Q und einer kubischen Fläche. Weiter gilt:

<u>a*)</u> Ist Q singulär, also ein quadratischer Kegel, so ist $\operatorname{card}(\mathbb{G}_3^1(V)) = 1$.

<u>b*)</u> Ist Q singularitätenfrei, so ist $\operatorname{card}(\mathbb{G}_3^1(V)) = 2$. $\square$

<u>BEMERKUNG:</u> In Satz 1.12* ist „Fläche" natürlich im Sinne der algebraischen Geometrie gemeint, d.h. eine Hyperfläche in $\mathbb{P}^3$. In diesem Zusammenhang ist die Riemannsche Fläche V eine Kurve. $\square$

Daß die Quadrik aus Satz 1.12* eindeutig bestimmt ist, kann man wie folgt einsehen. Ist C_V die kanonische Kurve einer kompakten nicht-hyperelliptischen Riemannschen Fläche V vom Geschlecht $g \geq 4$, so bestimmt die Menge aller Quadriken in $\mathbb{P}^{g-1}$, die C_V enthalten, einen komplex projektiven Raum, der isomorph zu $\mathbb{P}^m$ ist, wobei gilt: $m = (g-2)(g-3)/2 - 1$. [s. Namba M. [2]; S. 101] Ist speziell $g = 4$, so gilt $m = 0$. $\mathbb{P}^0$ besteht aber aus genau einem Punkt. Also ist die Quadrik aus Satz 1.12* eindeutig bestimmt.

T. Meis bewies den (bereits klassischen) Satz, daß es für jede kompakte Riemannsche Fläche V vom Geschlecht g eine natürliche Zahl $n \leq (g+3)/2$ gibt mit $Mer_n(V) \neq \emptyset$ [s. auch Meis T.: Die minimale Blätterzahl der Konkretisierungen einer kompakten Riemannschen Fläche. Schriftenreihe d. Math. Inst. d. Univ. Münster, H. 16 (1960)]. Für eine kompakte nicht-hyperelliptische Riemannsche Fläche V vom Geschlecht $g = 4$ bedeutet dies wegen $Mer_2(V) = \emptyset$: $Mer_3(V) \neq \emptyset$. Nach Satz 1.7* gilt $Mer_3(V)/Aut(\mathbb{P}^1) \approx \mathbb{G}_3^1(V) - \mathbb{F}_3^1(V)$. Zusammen mit $Mer_3(V) \neq \emptyset$ folgt hieraus, daß sich für kompakte nicht-hyperelliptische Riemannsche Flächen V vom Geschlecht $g = 4$ die Aussagen a) und a*) bzw. b) und b*) der Sätze 1.12

und 1.12* entsprechen. Man erhält weiter

NOTIZ 1.11.:

1.) Ist $V(D)$ vom Typ (I), so gilt für $V(D)$ die Aussage a) von Satz 1.12 (bzw. a*) von Satz 1.12*

2.) Ist $V(D)$ vom Typ (II), so gilt für $V(D)$ die Aussage b) von Satz 1.12 (bzw. b*) von Satz 1.12*)

BEWEIS: $V(D)$ sei vom Typ (I).

Die Differentialform $\omega = \frac{dx}{y^2}$ ist holomorph. Da $x : V(D) \to \mathbb{P}^1$ nicht über ∞ verzweigt, liegen über ∞ drei verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3 auf $V(D)$. Für $j = 1, \dots, 6$ sei $A_j := (\alpha_j, 0)$.

Es ist $x - \alpha_1 \in Mer_3(V(D))$, die Divisoren $D_1 := 3A_1$ und $D_2 := P_1 + P_2 + P_3$ sind positiv, und es gilt:

$$(x - \alpha_1) = 3A_1 - (P_1 + P_2 + P_3) = D_1 - D_2 .$$

$2D_2 = 2(P_1 + P_2 + P_3)$ ist aber kanonisch, wie aus den folgenden Rechnungen folgt:

Wegen $(y^3) = (x-\alpha_1) + \dots + (x - \alpha_6)$ ist $(y) = A_1 + \dots + A_6 - 2(P_1 + P_2 + P_3)$ und damit $\left(\frac{1}{y^2}\right) = -2(A_1 + \dots + A_6) + 4(P_1 + P_2 + P_3)$. Es gilt

$$(\omega) = \left(\frac{1}{y^2}\right) + (dx).$$

Da man um alle Punkte $Z \notin \{A_1,\dots,A_6,P_1,P_2,P_3\}$ x als lokale Karte wählen kann, gilt in diesen Punkten $(dx)(Z) = 0$. Der Nullstellendivisor von (dx) ist die Differente von x, also gilt: $(dx)(A_j) = 2$. Wegen $\operatorname{grad}(dx) = 2g-2 = 6$ folgt $(dx)(P_i) = -2$. Somit gilt:

$$(\omega) = \left(\frac{1}{y^2}\right) + (dx) =$$

$$-2(A_1+\dots+A_6)+4(P_1+P_2+P_3)+2(A_1+\dots+A_6)-2(P_1+P_2+P_3)$$
$$= 2(P_1+P_2+P_3), \text{ d.h. } (\omega) = 2D_2.$$

Mithin ist $2D_2$ kanonisch. Auf die Riemannschen Flächen $V(D)$ vom Typ (I) trifft also die Aussage a) von Satz 1.12 zu.

Sei nun $V(D)$ eine Riemannsche Fläche vom Typ (II)

Für $j=1,2,3$ seien $A_j := (\alpha_j, 0)$, $B_j := (\beta_j, 0)$ und P_j die über ∞ gelegenen Punkte.

Sei g die meromorphe Funktion $\dfrac{(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)}{y}$

Wegen $(y^3) = (x-\alpha_1)+(x-\alpha_2)+(x-\alpha_3)+2(x-\beta_1)+2(x-\beta_2)+2(x-\beta_3)$ folgt:

$$(y) = A_1+A_2+A_3+2(B_1+B_2+B_3)-3(P_1+P_2+P_3).$$

Somit gilt: $(g) = 3(B_1+B_2+B_3) - 3(P_1+P_2+P_3) - (A_1+A_2+A_3) - 2(B_1+B_2+B_3) + 3(P_1+P_2+P_3) = B_1+B_2+B_3-A_1-A_2-A_3$.

g besitzt also an den Stellen A_j einen Pol der Ordnung 1 und an den Stellen B_j eine Nullstelle der Ordnung 1.

Es gilt nun für jeden Automorphismus $C \in Aut(\mathbb{P}^1)$
$g \neq C \circ x$

Gäbe es nämlich ein $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $g = C \circ x$, so würde gelten:

$$\frac{(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)}{y} = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ d.h.}$$

$$\frac{(cx+d)(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)}{ax+b} = y.$$

Dies bedeutet aber $y \in \mathbb{C}(x)$. Widerspruch! Damit ist Notiz 1.11 auch für die Riemannschen Flächen $V(D)$ vom Typ (II) bewiesen. $\square$

Für das Folgende ist von Bedeutung

<u>SATZ 1.13:</u> Eine Riemannsche Fläche $V(D_1)$ vom Typ (I) kann niemals biholomorph äquivalent zu einer Riemannschen Fläche $V(D_2)$ vom Typ (II) sein. Insbesonders kann dann

eine Riemannsche Fläche $V(\mathcal{D})$ nicht gleichzeitig vom Typ (I) und vom Typ (II) sein.

BEWEIS: Sei $V(\mathcal{D}_1)$ vom Typ (I) und $V(\mathcal{D}_2)$ vom Typ (II). Nach Notiz 1.11 gilt dann für $V(\mathcal{D}_1)$ die Aussage a) von Satz 1.12 und für $V(\mathcal{D}_2)$ die Aussage b) von Satz 1.12.

Annahme: Es gibt eine biholomorphe Abbildung $h: V(\mathcal{D}_1) \to V(\mathcal{D}_2)$.

Auf $V(\mathcal{D}_2)$ gibt es $f_1, f_2 \in Mer_3(V(\mathcal{D}_2))$ mit $f_1 \neq B \circ f_2$ für alle $B \in Aut(\mathbb{P}^1)$. Andererseits gibt es ein $f \in Mer_3(V(\mathcal{D}_1))$ und $B_1, B_2 \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $f_1 \circ h = B_1 \circ f$ und $f_2 \circ h = B_2 \circ f$. Also gilt $f_1 \circ h = B_1 \circ B_2^{-1} \circ f_2 \circ h$, d.h. $f_1 = B_1 \circ B_2^{-1} \circ f_2$. Widerspruch! $\square$

Mit Hilfe von Notiz 1.11 folgt ebenfalls sofort:

COROLLAR 1.4.: Für Riemannsche Flächen vom Typ (I) gelten die Aussagen der Theoreme 1.1./1.

BEWEIS: Nach Notiz 1.11 gilt für Riemannsche Flächen $V(\mathcal{D})$, $V(\mathcal{D}')$ vom Typ (I) die Aussage a*) des Satzes 1.12*, d.h. $card(\mathbb{G}_3^1(V(\mathcal{D}))) = card(\mathbb{G}_3^1(V(\mathcal{D}'))) = 1$. Wegen $Mer_3(V(\mathcal{D})) \neq \emptyset$ liefert dann Satz 1.7.*: $card(Mer_3(V(\mathcal{D}))/Aut(\mathbb{P}^1)) = 1$

Also gibt es zu jeder biholomorphen Abbildung $f: V(D) \to V(D')$ genau ein $B \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $B \circ x = x \circ f$. Dies führt auf die Stellen (*) und (**) der Beweise zu Theorem 1.1. und Theorem 1.2. Damit ist Corollar 1.4. bewiesen. □

Um zu zeigen, daß Theorem 1.1. im Fall $p = 3$, $m = 6$ gültig bleibt, reicht es nunmehr aus, dies noch für die Riemannschen Flächen vom Typ (II) zu beweisen, da nach Satz 1.13 eine Riemannsche Fläche vom Typ (I) nicht biholomorph äquivalent zu einer Riemannschen Fläche vom Typ (II) sein kann.

Es werden im folgenden dreielementige Mengen $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ von komplexen Zahlen mit $A \cap B = \emptyset$ betrachtet.

Die Riemannsche Fläche

$$V: y^3 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2(x-\beta_3)^2$$

wird mit $V_{A,B}$ bezeichnet

Desgleichen werden die meromorphen Funktionen

$$x, y \text{ und } g = \frac{(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)}{y} \text{ auf } V_{A,B}$$

mit $x_{A,B}$, $y_{A,B}$ und $g_{A,B}$ bezeichnet. Es ist klar, was dann $V_{C,D}$, $V_{E,F}$, $x_{C,D}$, $x_{E,F}$, $y_{C,D}$, $y_{E,F}$, $g_{C,D}$ und $g_{E,F}$ bedeuten sollen.

Seien nun $V_{A,B}$ und $V_{C,D}$ zwei Riemannsche Flächen vom Typ (II) und $f: V_{A,B} \to V_{C,D}$ sei biholomorph.

Auf Grund des Beweises zu Notiz 1.11 und wegen Satz 1.12 gilt dann entweder $x_{C,D} \circ f \in \mathbb{C}(x_{A,B})$ oder $x_{C,D} \circ f \in \mathbb{C}(g_{A,B})$.

Im ersten Fall heiße f vom <u>reinen Typ</u>, ansonsten vom <u>gemischten Typ</u>.

Ist f rein, so gilt $g_{C,D} \circ f \in \mathbb{C}(g_{A,B})$.

Ansonsten gäbe es nach Satz 1.12 b) ein $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ mit $g_{C,D} \circ f = \varphi \circ x_{A,B}$.
Da f rein ist, gibt es aber auch ein $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ mit $x_{C,D} \circ f = \psi \circ x_{A,B} \Longleftrightarrow x_{A,B} = \psi^{-1} \circ x_{C,D} \circ f$.
Dies liefert: $g_{C,D} = \varphi \circ \psi^{-1} \circ x_{C,D}$, d.h. $g_{C,D} \in \mathbb{C}(x_{A,B})$. Widerspruch!

Analog folgt im Fall, daß f gemischt ist: $g_{C,D} \circ f \in \mathbb{C}(x_{A,B})$.

Man erhält somit:

<u>NOTIZ 1.12:</u> Ist $f: V_{A,B} \to V_{C,D}$ vom reinen Typ, so kommutieren die Diagramme

$$[D_1] \qquad \begin{tikzcd} V_{A,B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varkappa_{A,B}"'] & V_{C,D} \arrow[d, "\varkappa_{C,D}"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \qquad \text{und}$$

$$[D_2] \qquad \begin{tikzcd} V_{A,B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_{A,B}"'] & V_{C,D} \arrow[d, "g_{C,D}"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

für gewisse Automorphismen $\varphi, \psi \in Aut(\mathbb{P}^1)$.

Ist $f: V_{A,B} \to V_{C,D}$ vom gemischten Typ, so kommutieren die Diagramme

$$[D_3] \qquad \begin{tikzcd} V_{A,B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varkappa_{A,B}"'] & V_{C,D} \arrow[d, "g_{C,D}"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\varphi^*"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \qquad \text{und}$$

[D_4]
$$\begin{tikzcd} V_{A,B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_{A,B}"'] & V_{C,D} \arrow[d, "\chi_{C,D}"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\psi^*"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

für gewisse Automorphismen $\varphi^*, \psi^* \in Aut(\mathbb{P}^1)$. □

<u>NOTIZ 1.13.:</u> $f_1 : V_{A,B} \to V_{C,D}$ und $f_2 : V_{C,D} \to V_{E,F}$ seien biholomorph. Dann gilt:

$f_2 \circ f_1$ ist genau dann vom reinen Typ, wenn entweder f_1, f_2 beide vom reinen Typ sind oder f_1, f_2 beide vom gemischten Typ sind.

<u>BEWEIS:</u> Sind f_1, f_2 beide rein, so gibt es nach Notiz 1.12. Automorphismen $\varphi_1, \varphi_2 \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $\chi_{C,D} \circ f_1 = \varphi_1 \circ \chi_{A,B}$ und $\chi_{E,F} \circ f_2 = \varphi_2 \circ \chi_{C,D}$. Es folgt: $\chi_{E,F} \circ f_2 \circ f_1 = \varphi_2 \circ \chi_{C,D} \circ f_1 = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \chi_{A,B}$, d.h. $f_2 \circ f_1$ ist rein.

Sind f_1, f_2 beide gemischt, so gibt es nach Notiz 1.12. Automorphismen $\varphi_1, \varphi_2 \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $g_{C,D} \circ f_1 = \varphi_1 \circ \chi_{A,B}$ und $\chi_{E,F} \circ f_2 = \varphi_2 \circ g_{C,D}$. Es folgt: $\chi_{E,F} \circ f_2 \circ f_1 = \varphi_2 \circ g_{C,D} \circ f_1 = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \chi_{A,B}$, d.h. $f_2 \circ f_1$ ist rein.

Ist f_1 rein und f_2 gemischt, so gibt es nach

Notiz 1.12. Automorphismen $\varphi_1, \varphi_2 \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $\chi_{C,D} \circ f_1 = \varphi_1 \circ \chi_{A,B}$ und $g_{E,F} \circ f_2 = \varphi_2 \circ \chi_{C,D}$.
Es folgt: $g_{E,F} \circ f_2 \circ f_1 = \varphi_2 \circ \chi_{C,D} \circ f_1 = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \chi_{A,B}$
d.h. $f_2 \circ f_1$ ist gemischt.

Analog folgt, daß $f_2 \circ f_1$ gemischt ist, falls f_2 rein und f_1 gemischt ist. □

Notiz 1.12. liefert weiter:

<u>COROLLAR 1.5:</u>

<u>(i):</u> Für alle Riemannschen Flächen $V_{A,B}$, $V_{C,D}$ vom Typ (II), die mittels einer biholomorphen Abbildung vom reinen Typ isomorph sind, gilt die Aussage von Theorem 1.1.

<u>(ii):</u> Für die Klasse der Riemannschen Flächen $V_{A,B}$ vom Typ (II), die nur Automorphismen vom reinen Typ besitzt, gilt die Aussage von Theorem 1.2.

<u>BEWEIS:</u> Die Kommutativität von Diagramm $[D_1]$ führt im Fall (i) auf die Stelle (∗) im Beweis zu Theorem 1.1. und im Fall (ii) auf die Stelle (∗∗) im Beweis zu Theorem 1.2. Daraus folgt die Behauptung. □

Um die Gültigkeit von Theorem 1.1. für die Riemannschen Flächen vom Typ (II) nachzuweisen, reicht es auf Grund von Corollar 1.5., zu zeigen, daß je zwei solche biholomorph äquivalente Flächen mittels einer reinen biholomorphen Abbildung isomorph sind. Die nachfolgenden Betrachtungen zielen darauf ab, die Existenz eines solchen reinen Isomorphismus nachzuweisen.

Für paarweise verschiedene komplexe Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bzw. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sei wieder $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ und $A \cap B = \emptyset$.

Sei
$$s_1(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$
$$s_2(A) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3,$$
$$s_3(A) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 .$$

Analog sei $s_i(B)$ definiert $(i = 1, 2, 3)$.

Die $s_i(A)$, $s_i(B)$ sind gerade die elementarsymmetrischen Funktionen in den α_j bzw. β_j, woraus wegen $A \cap B = \emptyset$ sofort folgt:

<u>NOTIZ 1.14</u>: Gilt $s_1(A) = s_1(B)$ und $s_2(A) = s_2(B)$, so gilt $s_3(A) \neq s_3(B)$. $\square$

Die Punkte von $V_{A,B}$, die bezüglich $x_{A,B}$ über α_j bzw. β_j liegen, seien wieder mit A_j bzw. B_j bezeichnet und die drei Punkte über ∞

wieder mit P_1, P_2, P_3.

Für meromorphes $f: V_{A,B} \to \mathbb{P}^1$ sei $v(f,P)$ die Vielfachheit von f im Punkt $P \in V_{A,B}$. Es erweist sich als notwendig, die Differente

$$\mathrm{Diff}(g_{A,B}) = \sum_{P \in V_{A,B}} (v(g_{A,B}, P) - 1)P$$

zu berechnen.

<u>LEMMA 1.4.:</u> Sei $V_{A,B}$ vom Typ (II).
<u>Fall (a):</u> $s_1(A) \neq s_1(B)$. Dann gilt:

$$\mathrm{Diff}(g_{A,B}) = e_1 E_1 + \dots + e_k E_k$$

für gewisse $E_i \in V_{A,B}$, $e_i \in \{1,2\}$ mit $e_1 + \dots + e_k = 1$.

<u>Fall (b):</u> $s_1(A) = s_1(B)$, $s_2(A) \neq s_2(B)$. Dann gilt:

$$\mathrm{Diff}(g_{A,B}) = P_1 + P_2 + P_3 + e_1 E_1 + \dots + e_k E_k$$

für gewisse $E_i \in V_{A,B}$, $e_i \in \{1,2\}$ mit $e_1 + \dots + e_k = 9$.

<u>Fall (c):</u> $s_1(A) = s_1(B)$, $s_2(A) = s_2(B)$ und also nach Notiz 1.14.: $s_3(A) \neq s_3(B)$. Dann gilt:

$$\mathrm{Diff}(g_{A,B}) = 2(P_1 + P_2 + P_3) + e_1 E_1 + \dots + e_k E_k$$

für gewisse $E_i \in V_{A,B}$, $e_i \in \{1,2\}$ mit $e_1 + \dots + e_k = 6$.

<u>BEWEIS:</u> $x_{A,B}$ werde wieder mit x bezeichnet. Die meromorphe Funktion $R_{A,B}(x)$ sei definiert durch

$R_{A,B}(x) :=$

$(s_1(B)-s_1(A))x^4 + 2(s_2(A)-s_2(B))x^3 +$

$+(3(s_3(B)-s_3(A)) + s_1(A)s_2(B) - s_1(B)s_2(A))x^2 +$

$+(2s_3(A)s_1(B) - 2s_3(B)s_1(A))x + s_2(A)s_3(B) - s_2(B)s_3(A).$

Es gilt $dg_{A,B} = \left(\frac{(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)}{y}\right)' dx =$

$\left(\frac{x^3 - s_1(B)x^2 + s_2(B)x - s_3(B)}{y}\right)' dx .$

Mit $r(x) = x^3 - s_1(B)x^2 + s_2(B)x - s_3(B)$ folgt also:

$(\square) \quad dg_{A,B} = \frac{r'(x)y - r(x)y'}{y^2} dx .$

Mit $t(x) = x^3 - s_1(A)x^2 + s_2(A)x - s_3(A)$ erhält man:

$y' = \left((t(x)\cdot(r(x))^2)^{1/3}\right)' =$

$\frac{1}{3}\cdot\left(t(x)\cdot(r(x))^2\right)^{-2/3}\cdot\left(t(x)\cdot(r(x))^2\right)' =$

$\frac{1}{3y^2}\cdot\left(t'(x)\cdot(r(x))^2 + 2r(x)\cdot r'(x)\cdot t(x)\right) =$

$\frac{r(x)}{y^2}\cdot\left(t'(x)r(x) + 2r'(x)t(x)\right).$

Dies eingesetzt in ($\Box$) liefert:

$$dg_{A,B} = \left(\frac{r'(x)y - \frac{(r(x))^2}{3y^2}(t'(x)r(x) + 2r'(x)t(x))}{y^2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{r'(x)}{y} - \frac{(r(x))^2(t'(x)r(x) + 2r'(x)t(x))}{3y\cdot(r(x))^2\cdot t(x)}\right)dx$$

$$= \left(\frac{3r'(x)t(x) - (t'(x)r(x) + 2r'(x)t(x))}{3y\cdot t(x)}\right)dx$$

$$= \left(\frac{r'(x)t(x) - t'(x)r(x)}{3y\cdot t(x)}\right)dx.$$

Sei $w(x) = r'(x)t(x) - t'(x)r(x)$.

Es ist $r'(x) = 3x^2 - 2s_1(B)x + s_2(B)$ und
$t'(x) = 3x^2 - 2s_1(A)x + s_2(A)$.

Sei $u(x) = r'(x)t(x)$ und $v(x) = t'(x)r(x)$.

Um $w(x) = u(x) - v(x)$ zu berechnen, genügt es aus Symmetriegründen, $u(x)$ zu berechnen.

Es ist $u(x) =$
$(3x^2 - 2s_1(B)x + s_2(B))\cdot(x^3 - s_1(A)x^2 + s_2(A)x - s_3(A))$
$= 3x^5 - 3s_1(A)x^4 + 3s_2(A)x^3 - 3s_3(A)x^2 - 2s_1(B)x^4 +$
$+ 2s_1(B)s_1(A)x^3 - 2s_1(B)s_2(A)x^2 + 2s_1(B)s_3(A)x + s_2(B)x^3 -$
$- s_2(B)s_1(A)x^2 + s_2(B)s_2(A)x - s_2(B)s_3(A)$. Es folgt:

(8) $\qquad w(x) = R_{A,B}(x)$.

Somit gilt also:

(9) $\qquad dg_{A,B} = \dfrac{R_{A,B}(x)\,dx}{3y(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}$.

Nach Definition von $R_{A,B}(x)$ gilt ersichtlich:

(10) $\qquad (R_{A,B}(x)) = -\operatorname{grad}(R_{A,B}(x))\cdot(P_1+P_2+P_3) + D$

mit einem positiven Divisor D.

Weiter gilt:

(11) $\qquad (dg_{A,B}) = 4(P_1+P_2+P_3) - 2(A_1+A_2+A_3) + (R_{A,B}(x))$

<u>Beweis:</u> Wegen (9) gilt: $(dg_{A,B}) = (R_{A,B}(x)) - (3y(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)) + (dx) = (R_{A,B}(x)) - [A_1+A_2+A_3 + 2(B_1+B_2+B_3) - 3(P_1+P_2+P_3) + 3(A_1+A_2+A_3) - 3(P_1+P_2+P_3)] + (dx)$, d.h.:

(12) $\begin{cases} (dg_{A,B}) = \\ (R_{A,B}(x)) - 4(A_1+A_2+A_3) - 2(B_1+B_2+B_3) + 6(P_1+P_2+P_3) + (dx) \end{cases}$

Für $P \in \{A_1, A_2, A_3\}$ gilt wegen $(g_{A,B}) = B_1+B_2+B_3 - (A_1+A_2+A_3)$, daß $1/g_{A,B}$ eine Karte um P ist. Unter Beachtung von $dg_{A,B} = -g_{A,B}^2\, d(1/g_{A,B})$ folgt: $(dg_{A,B})(P) = -2$. Weiter gilt $(dx)(P) = 2$. Also gilt wegen (12): $-2 = (dg_{A,B})(P) = (R_{A,B}(x))(P) -$

d.h.:

$$(R_{A,B}(x))(P) = 0 \quad \text{und} \quad (dg_{A,B})(P) = -2 + (R_{A,B}(x))(P).$$

Für $P \in \{B_1, B_2, B_3\}$ gilt wegen $(g_{A,B}) = B_1 + B_2 + B_3 - (A_1 + A_2 + A_3)$, daß $g_{A,B}$ eine Karte um P ist, d.h.: $(dg_{A,B})(P) = 0$. Wegen $(dx)(P) = 2$ und (12) gilt dann:

$$(dg_{A,B})(P) = (R_{A,B}(x))(P) = 0.$$

Für $P \in \{P_1, P_2, P_3\}$ ist $1/x$ eine Karte um P. Wegen $dx = -x^2 d(1/x)$ und $(-x^2)(P) = -2$ folgt $(dx)(P) = -2$ und somit wegen (12):

$$(dg_{A,B})(P) = 4 + (R_{A,B}(x))(P).$$

Für $P \notin \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, P_1, P_2, P_3\}$ gilt wegen $(dx)(P) = 0$ und (12):

$$(dg_{A,B})(P) = (R_{A,B}(x))(P).$$

Damit ist die Gleichung (11) bewiesen.

Da $(dg_{A,B})$ kanonisch ist, folgt

$$(13) \qquad \operatorname{grad}(dg_{A,B}) = 2 \cdot 4 - 2 = 6.$$

Wegen $(g_{A,B}) = B_1 + B_2 + B_3 - (A_1 + A_2 + A_3)$ stimmt die Differente $\mathrm{Diff}(g_{A,B})$ mit dem Nullstellen-divisor von $dg_{A,B}$ überein. Dieser hängt noch von $s_1(A), s_1(B)$ bzw. $s_2(A), s_2(B)$ ab.

<u>Fall (a):</u> $s_1(A) \neq s_1(B)$.
Dann gilt $\operatorname{grad}(R_{A,B}(x)) = 4$ und (10), (11), (13) liefern:

$$(dg_{A,B}) = -2(A_1+A_2+A_3) + e_1E_1 + \dots + e_kE_k$$

für gewisse $E_i \in V_{A,B}$, $e_i \in \{1,2\}$ mit $e_1+\dots+e_k = 12$

Die e_i können nicht größer als 2 sein, da $g_{A,B} \in \mathrm{Mer}_3(V_{A,B})$ gilt und somit $\vartheta(g_{A,B}, P) \leq$ für alle $P \in V_{A,B}$. Es folgt:

$$\mathrm{Diff}(g_{A,B}) = e_1E_1 + \dots + e_kE_k.$$

<u>Fall (b):</u> $s_1(A) = s_1(B)$ und $s_2(A) \neq s_2(B)$.
Dann gilt $\operatorname{grad}(R_{A,B}(x)) = 3$. (10), (11), (13) liefern:

$$(dg_{A,B}) = P_1+P_2+P_3 - 2(A_1+A_2+A_3) + e_1E_1 + \dots + e_kE_k$$

für gewisse $E_i \in V_{A,B}$, $e_i \in \{1,2\}$ mit $e_1+\dots+e_k =$

Es folgt:

$$\mathrm{Diff}(g_{A,B}) = P_1+P_2+P_3 + e_1E_1 + \dots + e_kE_k.$$

<u>Fall (c):</u> $s_1(A) = s_1(B)$ und $s_2(A) = s_2(B)$.
Nach Notiz 1.14 gilt dann $s_3(B) \neq s_3(A)$.
Daraus folgt: $\operatorname{grad}(R_{A,B}(x)) = 2$. (10), (11), (1

liefern dann :

$$(dg_{A,B}) = 2(P_1+P_2+P_3) - 2(A_1+A_2+A_3) + e_1E_1+\dots+e_k$$

für gewisse $E_i \in V_{A,B}$, $e_i \in \{1,2\}$ mit $e_1+\dots+e_k =$

Also gilt in diesem Fall :

$$\mathrm{Diff}\,(g_{A,B}) = 2(P_1+P_2+P_3) + e_1E_1+\dots+e_kE_k .$$

Mehr Fälle gibt es nicht. Lemma 1.4. ist damit bewiesen. □

Lemma 1.4. ermöglicht den Beweis des folgenden Satzes, der besagt, daß nur zwischen ganz speziellen Riemannschen Flächen vom Typ (II) ein Isomorphismus gemischten Typs existieren kann.

<u>SATZ 1.14.:</u> Seien $V_{A,B}$, $V_{C,D}$ Riemannsche Flächen vom Typ (II) und $f: V_{A,B} \to V_{C,D}$ sei eine biholomorphe Abbildung vom gemischten Typ. Dann ist $V_{A,B}$ (und, da mit f auch f^{-1} vom gemischten Typ ist, somit auch $V_{C,D}$) biholomorph äquivalent vermittels eines Isomorphismus vom reinen Typ zu einer Riemannschen Fläche $V(\lambda^3)$, die gleichungsdefiniert ist durch

$$V(\lambda^3):\ y^3 = (x^3-1)(x^3-\lambda^3)^2$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda^3 \neq 1$.

<u>BEMERKUNG</u>: Es ist klar, daß in Satz 1.14 nicht $\lambda^3 = 1$ gelten kann. Im Fall $\lambda^3 = 1$ erhält man nämlich die Gleichung $y^3 = (x^3 - 1)^3$, die ersichtlich reduzibel ist und somit keine Riemannsche Fläche definiert. $\square$

<u>BEWEIS</u> (von Satz 1.14.):

Da f gemischt ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_{A,B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x_{A,B}"'] & V_{C,D} \arrow[d, "g_{C,D}"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

für ein gewisses $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$.

$g_{C,D}$ besitzt also das gleiche Verzweigungsverhalten wie $x_{A,B}$, d.h.: $g_{C,D}$ verzweigt in genau 6 Punkten voll. In Lemma 1.4. können also nur die Fälle (a) und (c) eintreten, da für die sechs Verzweigungspunkte von $x_{A,B}$ gilt: $v(x_{A,B}, P) = 2$. Für die Differente von $g_{C,D}$ gilt also:

$\mathrm{Diff}(g_{C,D}) = 2(E_1 + \dots + E_6)$ für gewisse $E_i \in V_{C,D}$

Aus $\varphi \circ x_{A,B} = g_{C,D} \circ f$ folgt für jeden Auto-

morphismus $\psi \in Aut(\mathbb{P}^1)$: $(\psi \circ \varphi) \circ x_{A,B} = (\psi \circ g_{C,D}) \circ$
Man hätte also die ganzen bisherigen Betrachtungen anstatt mit $g_{C,D}$ auch mit $\psi \circ g_{C,D}$ anstellen können. Daher kann man annehmen, daß $g_{C,D}$ über ∞ verzweigt und somit in Lemma 1.4 der Fall (c) eintritt. Dann gilt also:

$$Diff(g_{C,D}) = 2(P_1 + P_2 + P_3) + 2(E_1 + E_2 + E_3).$$

Weiter hätte man für jedes $r \in \mathbb{C}^*$ $x_{C,D}$ durch $r x_{C,D}$ ersetzen können. Also kann man in der definierenden Gleichung von $R_{C,D}(x)$ direkt $s_3(C) - s_3(D) = 1$ annehmen. $R_{C,D}(x)$ nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$R_{C,D}(x) = -3x^2 + 2s_1(C)x - s_2(C).$$

Hätte das komplexe Polynom $-3T^2 + 2s_1(C)T - s_2(C)$ zwei verschiedene Nullstellen, so würde man (auf Grund des Beweises zu Lemma 1.4.) mehr als drei Punkte $E_i' \notin \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, P_1, P_2, P_3\}$ auf $V_{C,D}$ erhalten mit $R_{C,D}(x)(E_i') = 0$. Dies aber wäre ein Widerspruch zu $Diff(g_{C,D}) = 2(P_1 + P_2 + P_3) + 2(E_1 + E_2 + E_3)$.

Das Polynom $-3T^2 + 2s_1(C)T - s_2(C)$ besitzt also eine doppelte Nullstelle. Für die Diskriminante $Dis = (2s_1(C))^2 - 12s_2(C)$ gilt dann:

$\mathrm{Dis} = 0 \iff s_1(C)^2 = 3s_2(C)$.

Die definierende Gleichung von $V_{C,D}$ geht damit unter Beachtung von $s_1(C) = s_1(D)$, $s_2(C) = s_2(D)$ und $-s_3(D) = 1 - s_3(C)$ über in

$$y^3 = \left(x^3 - s_1(C)x^2 + \tfrac{1}{3}s_1(C)^2 x - s_3(C)\right) \cdot$$
$$\cdot \left(x^3 - s_1(C)x^2 + \tfrac{1}{3}s_1(C)^2 x + 1 - s_3(C)\right)^2.$$

Sei $\lambda := \sqrt[3]{\dfrac{s_3(C) - \left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3 - 1}{s_3(C) - \left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3}}$

Es gilt $\lambda^3 \neq 1$.

Die Transformation $h : V_{C,D} \longrightarrow V(\lambda^3)$;

$$(x,y) \xmapsto{h} \left(\frac{x - \frac{s_1(C)}{3}}{\sqrt[3]{s_3(C) - \left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3}}, \frac{y}{s_3(C) - \left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3} \right)$$

erweist sich als biholomorph.

Es genügt, die Wohldefiniertheit von h zu zeigen. Sei $(x,y) \in V_{C,D}$. Dann gilt:

$$\left(\left(\frac{x-\frac{s_1(C)}{3}}{\sqrt[3]{s_3(C)-\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3}}\right)^3-1\right)\cdot\left(\left(\frac{x-\frac{s_1(C)}{3}}{\sqrt[3]{s_3(C)-\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3}}\right)^3-\lambda^3\right)^2$$

$$=\left(\frac{x^3-s_1(C)x^2+\frac{s_1(C)^2}{3}\cdot x-\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3-s_3(C)+\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3}{s_3(C)-\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{x^3-s_1(C)x^2+\frac{s_1(C)^2}{3}\cdot x-\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3-\left[s_3(C)-\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3\right]\cdot\lambda^3}{s_3(C)-\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3}\right)$$

$$=\left[\left(x^3-s_1(C)x^2+\frac{s_1(C)^2}{3}\cdot x-s_3(C)\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(x^3-s_1(C)x^2+\frac{s_1(C)^2}{3}\cdot x+1-s_3(C)\right)^2\right]\Big/\left(s_3(C)-\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3\right)$$

$$=\left(\frac{y}{s_3(C)-\left(\frac{s_1(C)}{3}\right)^3}\right)^3 .$$

h ist also wohldefiniert und somit biholomorph. Schlie-
lich ist h trivialerweise rein. Damit ist Satz 1.14. bewiesen. □

Auf $V(\lambda^3)$ sei die meromorphe Funktion $g : V(\lambda^3) \to \mathbb{P}^1$ definiert durch

$$g := \frac{x^3 - \lambda^3}{y} .$$

Das folgende Lemma besagt, daß die Riemannschen Flächen $V(\lambda^3)$, $\lambda^3 \neq 1$, tatsächlich Automorphismen vom gemischten Typ besitzen.

<u>LEMMA 1.5.:</u> Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda^3 \neq 1$. Dann ist

$\Phi_{mix} : V(\lambda^3) \longrightarrow V(\lambda^3)$ mit

$$\Phi_{mix}(x,y) := (\Phi_{mix}(x), \Phi_{mix}(y)) := \left(g(x,y), \frac{g(x,y)^3 - \lambda^3}{x} \right)$$

ein involutorischer Automorphismus vom gemischten Typ.

<u>BEWEIS:</u> Zur Wohldefiniertheit von Φ_{mix}:
Sei $(x,y) \in V(\lambda^3)$. Dann gilt:

$$(\Phi_{mix}(y))^3 = \left(\frac{\left(\frac{x^3 - \lambda^3}{y}\right)^3 - \lambda^3}{x} \right)^3 =$$

$$\left(\frac{\frac{(x^3-\lambda^3)^3}{(x^3-1)(x^3-\lambda^3)^2} - \lambda^3}{x} \right)^3 = \left(\frac{\frac{x^3-\lambda^3}{x^3-1} - \lambda^3}{x} \right)^3 =$$

$$\left(\frac{x^3 - \lambda^3 - \lambda x^3 + \lambda^3}{x(x^3-1)} \right)^3 = \frac{(x^2(1-\lambda^3))^3}{(x^3-1)^3} = \frac{x^6(1-\lambda^3)^3}{(x^3-1)^3} =: L .$$

Andererseits gilt:

$$\left((\Phi_{mix}(x))^3-1\right)\left((\Phi_{mix}(x))^3-\lambda^3\right)^2 =$$

$$\left(\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}\right)^3-1\right)\cdot\left(\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}\right)^3-\lambda^3\right)^2 =$$

$$\left(\frac{x^3-\lambda^3}{x^3-1}-1\right)\cdot\left(\frac{x^3-\lambda^3}{x^3-1}-\lambda^3\right)^2 =$$

$$\frac{(1-\lambda^3)\left((1-\lambda^3)x^3\right)^2}{(x^3-1)^3} = \frac{x^6(1-\lambda^3)^3}{(x^3-1)^3} = L\,.$$

Φ_{mix} ist also wohldefiniert. Weiter gilt:

$$\Phi_{mix}(\Phi_{mix}(x,y)) = \Phi_{mix}\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}, \frac{\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}\right)^3-\lambda^3}{x}\right) =$$

$$\left[\frac{\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}\right)^3-\lambda^3}{\left(\frac{\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}\right)^3-\lambda^3}{x}\right)}, \frac{\left(\frac{\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}\right)^3-\lambda^3}{\left(\frac{\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}\right)^3-\lambda^3}{x}\right)}\right)^3-\lambda^3}{\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}\right)}\right] =$$

$$\left(x, \frac{x^3-\lambda^3}{\left(\frac{x^3-\lambda^3}{y}\right)}\right) = (x,y).$$

Also ist Φ_{mix} ein involutorischer Automorphismus. Daß Φ_{mix} vom gemischten Typ ist, ist klar. Damit ist Lemma 1.5. bewiesen. $\square$

COROLLAR 1.6.: Für die Klasse der Riemannsche[n] Flächen vom Typ (II) gilt die Aussage von Theorem 1.1.

BEWEIS: $V_{A,B}$, $V_{C,D}$ seien Riemannsche Flächen vom Typ (II) und $\Phi: V_{A,B} \to V_{C,D}$ sei biholomorph und vom gemischten Typ. Dann gibt es nach Satz 1.14. komplexe Zahlen λ_1, λ_2 mit $\lambda_1^3 \neq 1$, $\lambda_2^3 \neq 1$ und biholomorphe Abbildungen

$$\varphi_1: V_{A,B} \longrightarrow V(\lambda_1^3), \quad \varphi_2: V_{C,D} \longrightarrow V(\lambda_2^3)$$

vom reinen Typ sowie nach Lemma 1.5. gemischte Automorphismen

$$\Phi^{(1)}_{mix} \in Aut(V(\lambda_1^3)) \text{ und } \Phi^{(2)}_{mix} \in Aut(V(\lambda_2^3)).$$

Die biholomorphe Abbildung $f: V_{A,B} \longrightarrow V_{C,D}$ mit

$$f := \varphi_2^{-1} \circ \Phi^{(2)}_{mix} \circ \varphi_2 \circ \Phi$$

ist dann nach Notiz 1.13. rein. Aus Corollar 1.5.(

folgt nun die Behauptung. □

Da eine Riemannsche Fläche vom Typ (I) nicht biholomorph äquivalent zu einer Riemannschen Fläche vom Typ (II) sein kann, liefern die Corollare 1.4. und 1.6.:

<u>SATZ 1.15 :</u> Im Fall $p = 3$, $m = 6$ bleibt die Aussage von Theorem 1.1. gültig. □

Nun kann auch gezeigt werden, daß Theorem 1.2. im Fall $p = 3$, $m = 6$ nicht mehr allgemeingültig bleibt.

<u>COROLLAR 1.7. :</u> Für die Riemannschen Flächen $V(\lambda^3)$, $\lambda^3 \neq 1$, gilt die Aussage von Theorem 1.2. nicht mehr.

<u>BEWEIS :</u> Für den involutorischen Automorphismus $\Phi_{mix} : V(\lambda^3) \longrightarrow V(\lambda^3)$ aus Lemma 1.5. gilt: $\Phi_{mix}(1,0) = P_i$ für ein $i \in \{1,2,3\}$. Die nicht-trivialen Decktransformationen aus K_3 permutieren die Nicht-Verzweigungspunkte von x mit gleichem Spurpunkt und können somit nur die Verzweigungspunkte von x als Fixpunkte besitzen. Sei τ ein Erzeugendes von K_3.

Würde Theorem 1.2. gültig bleiben, so wäre K_3

ein Normalteiler in $Aut(V(\lambda^3))$ und somit $\Phi_{mix} \circ \tau \circ \Phi_{mix}^{-1}$ eine Decktransformation aus K_3 mit $\Phi_{mix} \circ \tau \circ \Phi_{mix}^{-1}(P_i) = \Phi_{mix}(\tau(1,0)) = \Phi_{mix}(1,0) = P_i$, d.h.: $\Phi_{mix} \circ \tau \circ \Phi_{mix}^{-1} = id$. Wegen

$$\Phi_{mix} \circ \tau \circ \Phi_{mix}^{-1}(1,0) = \Phi_{mix}(\underbrace{\tau(P_i)}_{\neq P_i}) \neq (1,0)$$

ergibt dies einen Widerspruch. □

<u>COROLLAR 1.8.:</u> Im Fall $p=3$, $m=6$ gilt für die Klasse der Riemannschen Flächen, die zu keiner Riemannschen Fläche $V(\lambda^3)$, $\lambda^3 \neq 1$, biholomorph äquivalent sind, die Aussage von Theorem 1.2.

<u>BEWEIS:</u> Für Riemannsche Flächen vom Typ (I) wurde die Gültigkeit von Theorem 1.2. bereits gezeigt. Für Riemannsche Flächen vom Typ (II), die zu keiner Riemannschen Fläche $V(\lambda^3)$, $\lambda^3 \neq 1$, biholomorph äquivalent sind, existiert nach Satz 1.14 kein Isomorphismus vom gemischten Typ. Corollar 1.5. (ii) liefert dann die Behauptung. □

TEIL 2

In diesem Teil werden Riemannsche Flächen V mit einer definierenden Gleichung vom Typ

$$V: y^m = f(x),$$

wobei f ein Polynom vom Primzahlgrad p mit lauter verschiedenen Nullstellen ist, auf biholomorphe Äquivalenz untersucht.

Bevor die Hauptresultate formuliert und bewiesen werden, werden einige Hilfssätze bereitgestellt.

Vorab jedoch werden zwei elementare kombinatorische Bewertungen bewiesen.

NOTIZ 2.1: Sei p eine Primzahl, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl mit $ggT(p,n) = 1$ und

$$N := \{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 < j < p-1; 0 < k < n; kp - jn - n - 1 \geq 0\}.$$

Dann gilt: $\operatorname{card} N = \frac{1}{2}(p-1)(n-1)$.

BEWEIS: Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne $[x]$ die Gauß-Klammer, d.h.: $[x] = \sup\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$.

Notiz: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $[x] + [y] \geq [x+y] - 1$.

Beweis: Ist $x \in \mathbb{Z}$ oder $y \in \mathbb{Z}$, so gilt $[x+y] = [x] + [y$
Ist $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, so gilt $[x] < x < [x] +$

und $[y] < y < [y] + 1$. Daraus folgt: $[x+y] <$
$< x + y < [x] + [y] + 2$, also: $[x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

Sei nun $(j,k) \in N$. Dann gilt:

$$kp - (j+1)n > 0 \iff j > \frac{(k+1)n}{p}.$$

Da p keine der Zahlen $(k+1)n$ teilt, ist die letzte Ungleichung äquivalent zu

$$j \geqslant \left[\frac{(k+1)n}{p}\right] + 1.$$

Hieraus folgt:

$$(\square)\begin{cases} \operatorname{card} N = \sum_{k=0}^{p-2}\left(n - 1 - \left[\frac{(k+1)n}{p}\right]\right) = \\ (p-1)(n-1) - \sum_{k=0}^{p-2}\left[\frac{(k+1)n}{p}\right]. \end{cases}$$

Es gilt:

$$2 \cdot \sum_{k=0}^{p-2}\left[\frac{(k+1)n}{p}\right] =$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{n}{p}\right] + \left[(p-1)\frac{n}{p}\right] \\ +&\left[2\cdot\frac{n}{p}\right] + \left[(p-2)\frac{n}{p}\right] \\ +& \\ \vdots& \\ +&\left[(p-1)\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p}\right] \end{aligned}\right\} \quad (\Sigma)$$

.

Wegen $[x]+[y] \geq [x+y]-1$ folgt:

$$(\Sigma) \geq (p-1)(p \cdot \tfrac{n}{p}-1) = (p-1)(n-1).$$

Dies liefert mit ($\square$): card $N \leq \frac{1}{2}(p-1)(n-1)$.

Da p kein Teiler von n ist, folgt weiter:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[(p-1)\frac{n}{p}\right] < \frac{n}{p} + (p-1)\frac{n}{p} = n,$$

$$\left[2\frac{n}{p}\right] + \left[(p-2)\frac{n}{p}\right] < 2\frac{n}{p} + (p-2)\frac{n}{p} = n,$$

$$\vdots$$

$$\left[(p-1)\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p}\right] < (p-1)\frac{n}{p} + \frac{n}{p} = n.$$

Also gilt $(\Sigma) \leq (p-1)(n-1)$. Mit ($\square$) folgt:

card $N \geq \frac{1}{2}(p-1)(n-1)$.

Damit ist Notiz 2.1. bewiesen. $\square$

NOTIZ 2.2.: Sei p eine Primzahl, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl mit $\mathrm{ggT}(p,n)=1$ und

$$N' := \{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq j < p-1;\ 0 < k < n;\ kp-jn \geq 2n+1\}$$

Dann gilt: card $N' = \frac{1}{2}(p-1)(n-1) - n + 1 + \left[\frac{n}{p}\right]$.

BEWEIS: Sei

$$N'' := \{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq j < p-1;\ 0 < k < n;\ 2n+1 > kp-jn \geq n+1\}$$

Wegen Notiz 2.1. ist Notiz 2.2. bewiesen, wenn gezeigt wird:

card $N'' = n - 1 - [\frac{n}{p}]$.

Sei $(j,k) \in N''$. Dann gilt $kp - jn < 2n+1 \iff$

$$(U) \qquad k \leq \frac{n(j+2)}{p} .$$

Im Fall $j < p-2$ ist p kein Teiler von $n(j+2)$, so daß dann $k \leq \left[\frac{n(j+2)}{p}\right]$ gilt.

Im Fall $j = p-2$ gilt $\frac{n(j+2)}{p} = n$, so daß in diesem Fall wegen $k < n$ die Ungleichung (U) äquivalent ist zu $k \leq n-1$.

Man erhält also für $(j,k) \in N''$:

$$(1) \quad k \leq \begin{cases} \left[\frac{n(j+2)}{p}\right], & \text{falls } j < p-2 \\ n-1, & \text{falls } j = p-2 . \end{cases}$$

Weiter gilt für $(j,k) \in N''$: $kp - jn \geq n+1 \iff$ $k > \frac{(j+1)n}{p}$. Da p keine der Zahlen $(j+1)n$ teilt, ist dies äquivalent zu

$$(2) \qquad k \geq \left[\frac{(j+1)n}{p}\right] + 1 .$$

Sei nun $j \in \{0, \dots, p-2\}$ fest und $k \in \{1, \dots, n-1\}$

genüge den Bedingungen (1) und (2). Dann gilt $(j,k) \in$

In der Tat! Es wurde bereits gezeigt, daß aus (2) $kp - jn \geq n + 1$ folgt.

<u>Fall 1:</u> $j = p - 2$.

Es wurde bereits gezeigt, daß dies zusammen mit $k \leq n - 1$ äquivalent zu $k \leq \frac{n(j+2)}{p}$, d.h.: $kp - nj < 2n + 1$, ist.

<u>Fall 2:</u> $j < p - 2$.

Wegen (1) gilt dann: $k \leq \left[\frac{n(j+2)}{p}\right]$. Wegen $j+2 < p$ und $ggT(p,n) = 1$ ist p kein Teiler von $n(j+2)$, so daß also gilt: $\left[\frac{n(j+2)}{p}\right] < \frac{n(j+2)}{p}$. Es folgt: $k < \frac{n(j+2)}{p}$
$\Leftrightarrow kp - nj < 2n$.

Also gilt $(j,k) \in N''$.

Die obigen Betrachtungen haben gezeigt, daß für ein festes $j \in \{0, \ldots, p-2\}$ genau dann $(j,k) \in N$ gilt, wenn gilt:

$$(\alpha): \left[\frac{(j+1)n}{p}\right] + 1 \leq k \leq \left[\frac{n(j+2)}{p}\right], \text{ falls } j < p-2;$$

$$(\beta): \left[\frac{(j+1)n}{p}\right] + 1 \leq k \leq n - 1, \text{ falls } j = p - 2$$

Im Fall (α) gehören zu j also genau

$\left[\frac{n(j+2)}{p}\right] - \left[\frac{n(j+1)}{p}\right]$ k's mit $(j,k) \in N''$ und im Fall (β) gehören zu j genau

$n-1-\left[\frac{n(j+1)}{p}\right]$ k's mit $(j,k)\in N''$. Es folgt:

$$\operatorname{card} N'' = \sum_{j=0}^{p-3}\left(\left[\frac{n(j+2)}{p}\right]-\left[\frac{n(j+1)}{p}\right]\right)+n-1-\left[\frac{n(p-1)}{p}\right]=$$

$$\sum_{j=0}^{p-3}\left[\frac{n(j+2)}{p}\right]-\sum_{j=0}^{p-3}\left[\frac{n(j+1)}{p}\right]+n-1-\left[\frac{n(p-1)}{p}\right]=$$

$$\sum_{j=1}^{p-2}\left[\frac{n(j+1)}{p}\right]-\sum_{j=0}^{p-2}\left[\frac{n(j+1)}{p}\right]+n-1=\left[\frac{n}{p}\right]+n-1.$$

Damit ist Notiz 2.2. bewiesen. $\square$

<u>LEMMA 2.1.</u>: Sei p eine Primzahl und $n\geq 2$ eine natürliche Zahl mit $ggT(p,n)=1$. Die Riemannsche Fläche V sei gleichungsdefiniert durch

$$V:\ y^n=(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_p)$$

mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$

(i) Für das Geschlecht g von V gilt:

$$g=\frac{1}{2}(p-1)(n-1).$$

(ii) Die Menge

$$S:=\left\{\frac{x^j}{y^k}dx \,\middle|\, (j,k)\in\mathbb{Z}^2;\ 0\leq j<p-1;\ 0<k<n;\ kp-jn-n-1\geq 0\right\}$$

ist eine Basis von $\Omega(V)$.

<u>BEWEIS:</u> Mit $k_1 := \cdots := k_p := 1$ sieht man, daß man in der Situation von Fall (ii) auf Seite 5 ist und erhält wörtlich wie dort, daß $g = \frac{1}{2}(p-1)(n-$ gilt. Daß n hier i. a. keine Primzahl ist, spielt für den dortigen Beweis keine Rolle. Wesentlich ist nur, daß $ggT(p,n) = 1$ gilt.

Insbesondere ist also wieder x eine n-blättrige Überlagerung der Zahlenkugel, die voll über $\alpha_1, \dots, \alpha$ und ∞ verzweigt.

Für $j \in \{1, \dots, p\}$ sei A_j der über α_j gelegene Punkt und P_∞ der über ∞ gelegene Punkt.

Für den Divisor (x^j), $j \in \mathbb{N} + \{0\}$ erhält man

$$(3) \qquad (x^j) = j(Q_1 + \cdots + Q_n) - jnP_\infty$$

mit nicht notwendig verschiedenen $Q_i \in V$.

Wegen $(y^n) = n(A_1 + \cdots + A_p) - npP_\infty$ erhält man für $k \in \mathbb{N}$ weiter:

$$(4) \qquad (y^k) = k(A_1 + \cdots + A_p) - kpP_\infty .$$

In allen Punkten $Z \notin \{A_1, \dots, A_p, P_\infty\}$ gilt: $(dx)(Z$

Ist $Z \in \{A_1, \dots, A_p\}$, so stimmt $(dx)(Z)$ mit de

Differente von x in Z überein, d.h.: $(dx)(Z) = n-1$

Ist schließlich $Z = P_\infty$, so folgt wegen $\mathrm{grad}\,(dx) =$
$2g-2 = (n-1)(p-1)-2$: $(dx)(P_\infty) =$
$(n-1)(p-1)-2-(n-1)p = -n-1$. Also gilt

(5) $\quad (dx) = (n-1)(A_1+\dots+A_p)-(n+1)P_\infty$.

(3), (4), (5) liefern:

$$(6)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{x^j}{y^k}\,dx\right) = (x^j)-(y^k)+(dx) = \\ &j(Q_1+\dots+Q_n)-jn P_\infty - \\ &k(A_1+\dots+A_p)+kp P_\infty + \\ &(n-1)(A_1+\dots+A_p)-(n+1)P_\infty .\end{aligned}\right.$$

Notwendig dafür, daß $\frac{x^j}{y^k}dx$ holomorph ist,

ist ersichtlich

(7) $\quad kp - jn - n - 1 \geqq 0$.

Gilt zusätzlich

(8) $\quad k < n$,

so sieht man, daß (7) und (8) auch hinreichend dafür sind, daß $\frac{x^j}{y^k}dx$ holomorph ist.

Gelten nun (7) und (8), so folgt zunächst mit (7): $jn \leq kp - n - 1$. Wegen (8) gilt weiter: $kp - n - 1 < np - n - 1$. Also gilt: $j < p - 1 - \frac{1}{n} < p - 1$. Damit ist gezeigt:

Für $(j,k) \in N$, N wie in Notiz 2.1, sind die Differentialformen $\frac{x^j}{y^k}dx$ holomorph.

Sind $(j,k), (j',k') \in N$ mit $kp - jn - n - 1 = k'p - j'n - n - 1 \iff p(k-k') = n(j-j')$, so folgt wegen p prim und $ggT(p,n) = 1$, daß p ein Teiler von $j - j'$ ist. Da $|j-j'| \leq p-2$ gilt, folgt $j = j'$ und somit auch $k = k'$.

Sind also $(j,k), (j',k') \in N$ mit $(j,k) \neq (j',k')$, so besitzen $\frac{x^j}{y^k}dx$ und $\frac{x^{j'}}{y^{k'}}dx$ (wegen (6)) in P_∞ Nullstellen unterschiedlicher Ordnung. Hieraus folgt [s. auch Ahlfors L.V./Sario L. (1), S.326], daß S linear unabhängig ist. Da $\operatorname{card} S = \operatorname{card} N$ gilt, folgt mit Notiz 2.1., daß S eine Basis von $\Omega(V)$ ist. Damit ist Lemma 2.1. bewiesen.

<u>LEMMA 2.2.:</u> Sei p eine Primzahl und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl mit $ggT(p,n) = 1$. Weiter seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ paarweise verschiedene komplexe

Zahlen, V die gleichungsdefinierte Riemannsche Fläche

$$V: y^n = (x-\alpha_1)\cdot \dots \cdot (x-\alpha_p)$$

und P_∞ der (nach Lemma 2.1.) einzige bezüglich x über ∞ gelegene Punkt. Dann gilt:

$\{1, y, \dots, y^{[\frac{n}{p}]}, x\}$ ist eine Basis von $L(-nP_\infty)$.

<u>BEWEIS</u>: Sei $m \in \mathbb{N}$. Für den Divisor von y^m gilt: $(y^m) = m(A_1 + \dots + A_p) - mpP_\infty$, wobei die A_j die bzgl. x über α_j gelegenen Punkte sind.
Für $m \in \{1, \dots, [\frac{n}{p}]\}$ folgt $(y^m) \geq -nP_\infty$.
Wegen $(1) \geq -nP_\infty$ und $(x) \geq -nP_\infty$ gilt also

$$\{1, y, \dots, y^{[\frac{n}{p}]}, x\} \subset L(-nP_\infty).$$

Für $m \in \{1, \dots, [\frac{n}{p}]\}$ besitzen die y^m in P_∞ einen Pol der Ordnung $mp > 0$.

Die konstante holomorphe Funktion 1 besitzt in P_∞ einen „Pol" der Ordnung 0.

x besitzt in P_∞ einen Pol der Ordnung n.

Da p wegen $ggT(p, n) = 1$ kein Teiler von n ist, gilt für $m \in \{1, \dots, [\frac{n}{p}]\}$: $n \neq mp$.

Die Zahlen $0, p, 2p, \dots, [\frac{n}{p}]\cdot p$ und n sind also paarweise verschieden, woraus die lineare Unabhängigkeit der meromorphen Funktionen $1, y, \dots, y^{[\frac{n}{p}]}, x$ folgt [s. auch Ahlfors L.V. /Sario L. [1]; S.326].

Sei $\Omega(nP_\infty)$ der $\mathbb{C}$ – Vektorraum

$\{\omega | \omega$ meromorphe Differentialform auf V mit $(\omega) - nP_\infty \geq 0\} \cup \{0\}$

Alle $\omega \in \Omega(nP_\infty)$ sind holomorph. Somit besitzt $\Omega(nP_\infty)$ eine Basis $S' \subset S$ (S wie in Lemma 2.1.)

Nach (6) haben die Differentialformen $\frac{x^j}{y^k} dx \in S$ in P_∞ eine Nullstelle der Ordnung $kp - jn - n - 1$.
Es gilt $kp - jn - n - 1 \geq n \iff kp - jn \geq 2n + 1$

Sei N' wie in Notiz 2.2. definiert. Dann ist also

$S' := \left\{ \frac{x^j}{y^k} dx \mid (j,k) \in N' \right\}$ eine Basis von $\Omega(nP_\infty)$

Wegen card S' = card N' folgt für den Spezialitätsindex von nP_∞:

$$i(nP_\infty) = \operatorname{card} N' \overset{[\text{Notiz } 2.2.]}{=} \frac{1}{2}(p-1)(n-1) - n + 1 + \left[\frac{n}{p}\right]$$

Der Satz von Riemann – Roch liefert nun:

$$l(-nP_\infty) = \operatorname{grad}(nP_\infty) - g + 1 + i(nP_\infty) =$$

$$n - \frac{1}{2}(p-1)(n-1) + 1 + \frac{1}{2}(p-1)(n-1) - n + 1 + \left[\frac{n}{p}\right] = 2 + \left[\frac{n}{p}\right].$$

Zusammen mit der linearen Unabhängigkeit von $\{1, y, \ldots, y^{[\frac{n}{p}]}, x\} \subset L(-nP_\infty)$ folgt hieraus die Behauptung von Lemma 2.2. $\square$

Das zentrale Resultat von Teil 2 lautet nun:

<u>THEOREM 2.1.:</u> Sei p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2p+1$ und $n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$. Weiter seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ (bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_p$) paarweise verschiedene komplexe Zahlen und V, V' die gleichungsdefinierten kompakten Riemannschen Flächen

$$V: y^n = (x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_p),$$

$$V': y^n = (x-\beta_1) \cdot \ldots \cdot (x-\beta_p).$$ Dann gilt:

V und V' sind genau dann biholomorph äquivalent, wenn es einen Automorphismus $B \in Aut(\mathbb{C})$ gibt mit $\{B(\alpha_1), \ldots, B(\alpha_p)\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$.

<u>BEWEIS:</u>

„$\Leftarrow$": Seien V, V' wie in Theorem 2.1. definiert und $B(z) := az + b \in Aut(\mathbb{C})$ mit $B(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}) = \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$. Wegen $B \in Aut(\mathbb{C})$ gilt $a \neq 0$. Nach Notiz 1.1. gilt:

$$(B(x) - B(\alpha_1)) \cdot \ldots \cdot (B(x) - B(\alpha_p)) = a^p \cdot \prod_{i=1}^{p} (x - \alpha_i).$$

Die birationale Transformation

$$\psi_B : V \longrightarrow V' \; ; \; (x, y) \longmapsto (B(x), \sqrt[n]{a^p}\, y)$$

erweist sich ersichtlich als biholomorph. Damit ist „$\Leftarrow$" gezeigt und zwar ohne die einschränkende Bedingung : $n \geqslant 2p+1$.

„$\Longrightarrow$": Wegen p prim und $n \not\equiv 0 \pmod p$ folgt: $ggT(p, n) = 1$. Nach Lemma 2.1. besitzt V (und somit auch V') das Geschlecht $g = \frac{1}{2}(p-1)(n-$

Nach Lemma 2.2. ist $\{1, y, \ldots, y^{[\frac{n}{p}]}, x\}$ eine Basis von $L(-nP_\infty)$, wobei P_∞ (bzw. P'_∞) der einzige bzgl. x, aber auch y (bzw. x', aber auch y') über ∞ gelegene Punkt auf V (bzw. V') sei.

Sei nun $A : V \longrightarrow V'$ biholomorph.

Der Beweis erfolgt durch eine Rückspielung auf Theorem 1.2. und damit letztendlich auf Satz 1.

Die meromorphen Funktionen $z \in Mer(V)$ und $w \in Mer(V)$ seien definiert durch

$$z := x' \circ A \quad \text{und} \quad w := y' \circ A.$$

Wegen $x' \in Mer_n(V')$, $y' \in Mer_p(V')$ und A biholomorph, folgt: $z \in Mer_n(V)$ und $w \in Mer_p(V)$

Weiter gilt:

(g) $\quad w^n = (z-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(z-\beta_p)$,

denn für $(x,y)\in V$ gilt $(w(x,y))^n = (y'(A(x,y))$
$= (x'(A(x,y))-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(x'(A(x,y)-\beta_p) =$
$(z(x,y)-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(z(x,y)-\beta_p)$.

Die Voraussetzung $n \geqslant 2p+1$ liefert:

$$g = \tfrac{1}{2}(p-1)(n-1) \geqslant \tfrac{1}{2}(p-1)\cdot 2p > (p-1)^2.$$

Somit läßt sich wegen $w \in \mathrm{Mer}_p(V)$ Satz 1.1. bezüglich $y \in \mathrm{Mer}_p(V)$ anwenden, und man erhält einen eindeutig bestimmten Automorphism

$$E = \begin{bmatrix} c & c' \\ d & d' \end{bmatrix} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1),$$

so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "y"'] \arrow[dr, "w"] & V' \arrow[d, "y'"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "E"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

Es gilt also $w = E\circ y = \dfrac{cy+d}{c'y+d'}$ $\quad (cd'-c'd \neq 0)$.

(*) Von hier bis zur Stelle (**) ist die Bedingung $n \geqslant 2p+1$ überflüssig!

Sei nun $Q := A^{-1}(P'_\infty)$.

Fall 1: $Q = P_\infty$.

Wegen $x' \in L(-nP'_\infty) \subset Mer(V')$ folgt dann:
$z = x' \circ A \in L(-nP_\infty) \subset Mer(V)$.

Da $\{1, y, \dots, y^{[\frac{n}{p}]}, x\}$ eine Basis von $L(-nP_\infty)$ ist, läßt sich z als Linearkombination

(10) $\quad z = a_0 + a_1 y + \dots + a_{[\frac{n}{p}]} y^{[\frac{n}{p}]} + bx$

schreiben mit eindeutig bestimmten komplexen Zahlen α_j, b.

Sei $\quad s := \left[\frac{n}{p}\right]$.

Aus $n \not\equiv 0 \pmod p$ folgt $sp < n$. Da für $j \leq s$ die Funktion y^j in P_∞ nur einen Pol der Ordnung $jp < sp < n$ besitzt, andererseits aber z in P_∞ einen Pol der Ordnung n, folgt, daß in der Darstellung (10) von z gelten muß:

(11) $\quad b \neq 0$.

Aus $Q = P_\infty$ folgt in der Darstellung $w = E \circ y = \frac{cy+d}{c'y+d'}$ sofort $c' = 0$ und somit O.B.d.A.: $E = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d.h.:
(12) $\quad w = cy + d$.

(12) und (10), eingesetzt in (9), liefern:

$$(13) \qquad (cy+d)^m = \prod_{j=1}^{p} (a_0 + a_1 y + \cdots + a_s y^s + bx - \beta_j)$$

Wäre $(a_1, \ldots, a_s) \neq (0, \ldots, 0)$, so erhielte man aus (13) und $c^m y^m = c^m \cdot \prod_{j=1}^{p} (x - \alpha_j)$ durch Subtraktion ein $\ell < n$ und Polynome $A_1, \ldots, A_\ell$ mit $y^\ell + A_1(x) y^{\ell-1} + \cdots + A_\ell(x) = 0$. Es gäbe also ein Polynom H aus $\mathbb{C}(x)[T] - \{0\}$ mit grad $H = \ell <$ das von y identisch annulliert wird. Dies wider spräche aber der Wahl von x und y (s. auch Einleitung). Also gilt $a_1 = \cdots = a_s = 0$. Gleichun (13) geht dann über in

$$(cy+d)^n = \prod_{j=1}^{p} (a_0 + bx - \beta_j).$$

Wäre $d \neq 0$, so folgt aus dieser Gleichung und $c^m y^m = c^n (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_p)$ durch Subtraktion wiederum die Existenz eines Polynoms $H \in \mathbb{C}(x)[T] - \{$ vom Grad $n-1$, das von y identisch annulliert wird. Dies aber ist unmöglich. Also gilt $d = 0$. Damit erhält man:

$$c^m (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_p) = c^m y^m = \prod_{j=1}^{p} (a_0 + bx - \beta_j) =$$

$$b^p \cdot \left(x - \frac{(\beta_1 - a_0)}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x - \frac{(\beta_p - a_0)}{b}\right).$$

Hieraus folgt, daß die Divisoren von $(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha$
und $\left(x - \frac{(\beta_1 - a_0)}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - \frac{(\beta_p - a_0)}{b}\right)$ überein-
stimmen. Mithin gilt:

$$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} = \left\{\frac{\beta_1 - a_0}{b},\ldots,\frac{\beta_p - a_0}{b}\right\} \iff$$

$$\{\beta_1,\ldots,\beta_p\} = \{b\alpha_1 + a_0,\ldots,b\alpha_p + a_0\}.$$

Nach (11) ist $b \neq 0$. Somit ist dann $B(\lambda) := b\lambda + a$
$(\lambda \in \mathbb{C})$ ein Element aus $Aut(\mathbb{C})$ mit $\{B(\alpha_1),\ldots,B(\alpha_p$
$= \{\beta_1,\ldots,\beta_p\}$. Damit ist Fall 1 erledigt.

Die kanonische Fortsetzung von B zu einem $\mathbb{P}^1$-Automorphismus werde ebenfalls mit B bezeichnet.

Wegen $a_1 = \cdots = a_s = 0$ gilt dann Gleichung (10) in der Form:

$$z = bx + a_0 \iff x' \circ A = B \circ x,$$

d.h., das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "x"'] & V' \arrow[d, "x'"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "B"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}.$$

Es wird gleich gezeigt werden, daß der Fall 2: $Q \neq P_\infty$, nicht eintreten kann. Somit gilt also die für den Beweis von Theorem 2.2. wichtige

<u>BEMERKUNG 2.1.:</u> Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.1. gilt:

Zu jeder biholomorphen Abbildung $A: V \to V'$ gibt es genau einen Automorphismus $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ mit $B(\infty) = \infty$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "x"'] & V' \arrow[d, "x'"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "B"] & \mathbb{P}^1. \end{tikzcd} \qquad \square$$

<u>Fall 2:</u> $Q \neq P_\infty$.

Da P_∞ der einzige bzgl. x über ∞ gelegene Punkt auf V ist, gilt: $Q = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$.

y besitzt in P_∞ einen Pol der Ordnung p. Da $w = E \circ y = \frac{cy+d}{c'y+d'}$ mit $E \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ gilt, folgt, daß y in (x_0, y_0) den Wert $E^{-1}(\infty) = -\frac{d'}{c'}$ mit der Vielfachheit p annimmt. Es folgt weiter, daß dann y^n den Wert y_0^n in (x_0, y_0) mit der Vielfachheit

np annimmt. Also besitzt $y^n - y_0^n$ in (x_0, y_0) eine Nullstelle der Ordnung np.

Wegen $(y) = n(A_1 + \cdots + A_p) - npP_\infty$ $(A_j := (\alpha_j, 0))$ und $y_0 \in \mathbb{C}$ folgt, daß $y^n - y_0^n$ genau in P_∞ einen Pol der Ordnung np besitzt. Es gilt also:

$$(y^n - y_0^n) = npQ - npP_\infty .$$

Trivialerweise gilt aber auch:

$((x - x_0)^p) = npQ - npP_\infty$. Somit gilt also:

$$y^n - y_0^n = \lambda (x - x_0)^p \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}^* \iff$$

$$(x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_p) = \lambda (x - x_0)^p + y_0^n .$$

Da die letzte Gleichung insbesonders für alle komplexen Zahlen gilt, läßt sie sich als komplexe Polynomgleichung auffassen. Hieraus folgt sofort $\lambda = 1$, da die linke Seite normiert ist. Da die α_j paarweise verschieden sind, folgt weiter $y_0 \neq 0$.

Die Riemannsche Fläche V ist also gleichungsdefiniert durch

$$V : y^n = (x - x_0)^p + y_0^n . \quad (y_0 \neq 0)$$

Für die biholomorphe Abbildung $A^{-1} : V' \to V$ gilt wegen $Q = A^{-1}(P_\infty) \neq P_\infty$ auch $(A^{-1})^{-1}(P_\infty) \neq P_\infty$

Also gilt wörtlich wie oben, daß auch die Riemannsche Fläche V' gleichungsdefiniert ist durch

$$V' : y^n = (x - x_1)^p + y_1^n$$

mit einem $(x_1, y_1) \in \mathbb{C}^2$ und $y_1 \neq 0$.

Sei nun V_0 gleichungsdefiniert durch

$$V_0 : y^p = x^n - 1 .$$

Weiter seien y_0', y_1' komplexe Zahlen mit $y_0'^p = y_0^n$ und $y_1'^p = y_1^n$. Wegen $y_0 \neq 0$ und $y_1 \neq 0$ gilt: $y_0' \neq 0$ und $y_1' \neq 0$.

Die birationalen Transformationen

$$A_0 : V \ni (x, y) \longmapsto \left(\frac{y}{y_0} , \frac{x - x_0}{y_0'} \right) \in V_0 \quad \text{und}$$

$$A_0' : V' \ni (x, y) \longmapsto \left(\frac{y}{y_1} , \frac{x - x_1}{y_1'} \right) \in V_0$$

sind biholomorph.

Es genügt, die Wohldefiniertheit von A_0 zu zeigen.

Für $(x, y) \in V$ gilt: $\left(\frac{x - x_0}{y_0'} \right)^p = \frac{(x - x_0)^p}{y_0^n} =$

$$\frac{(x - x_0)^p + y_0^n - y_0^n}{y_0^n} = \frac{y^n - y_0^n}{y_0^n} = \left(\frac{y}{y_0} \right)^n - 1 .$$

A_o ist also wohldefiniert. Somit sind A_o und A_o' biholomorph.

Für den Automorphismus $A_o \circ A^{-1} \circ A_o'^{-1} : V_o \to V_o$ gilt weiter:

$$(14) \begin{cases} A_o \circ A^{-1} \circ A_o'^{-1}(P_\infty^o) = A_o \circ A^{-1}(P_\infty') = A_o(Q) = \\ A_o(x_o, y_o) = \left(\frac{y_o}{y_o}, \frac{x_o - x_o}{y_o'}\right) = (1, 0) \end{cases} .$$

Dabei sei P_∞^o der Punkt auf der Riemannschen Fläche V_o mit $x^o(P_\infty^o) = \infty$ und $y^o(P_\infty^o) = \infty$.

(✱✱) Von nun an gelte wieder die Bedingung $n \geq 2p+1$

Dann läßt sich auf V_o die Aussage von Theorem 1.2. anwenden.

Sei $L_D(V_o)$ die zu V_o gehörige Gruppe L_D aus Theorem 1.2. und K_p die Decktransformationsgruppe von V_o bzgl. der kanonischen meromorphen Projektion $x^o : V_o \to \mathbb{P}^1$. Mit $\lambda = e^{2\pi i/n}$ folgt:

$$L_D(V_o) = \{B \in Aut(\mathbb{P}^1) \mid B(\{\lambda^1, \ldots, \lambda^n, \infty\}) = \{\lambda^1, \ldots, \lambda^n, \infty\}\}$$

<u>NOTIZ 2.3.:</u> Für $B \in L_D(V_o)$ gilt: $B(\infty) = \infty$.

<u>BEWEIS:</u> Sei $B \in L_D(V_o)$.

<u>Annahme:</u> Es gibt ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $B(\lambda^j) = \infty$.

Man kann O.B.d.A. $j=n$, d.h. $\lambda^j = 1$, annehmen. (Ansonsten komponiere man B mit einer Drehung φ, für die $\varphi(1) = \lambda^j$ gilt und betrachte $B\circ\varphi \in L_D(V_0$

$\mathbb{P}^1$- Automorphismen bilden Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.

Wegen $B(1) = \infty$ bildet also B den Einheitskreis $\mathbb{E}$ auf eine Gerade g ab. Es gilt also: $B(\lambda^1) \in g$, $B(\lambda^2) \in g, \ldots, B(\lambda^n) \in g$. Wegen $B(\{\lambda^1, \ldots, \lambda^n, \infty\}$ $\{\lambda^1, \ldots, \lambda^n, \infty\}$ und $B(1) = \infty$ gilt aber auch $B(\lambda^1) \in \mathbb{E}, \ldots, B(\lambda^{n-1}) \in \mathbb{E}$. Somit gilt also:

$$B(\lambda^1) \in \mathbb{E} \cap g, \ldots, B(\lambda^{n-1}) \in \mathbb{E} \cap g.$$

Da eine Gerade einen Kreis in höchstens zwei Punkten schneidet, ergibt dies wegen $n-1 > 2$ einen Widerspruch. Es gilt also $B(\infty) = \infty$. $\square$

Aus Notiz 2.3. folgt unmittelbar, daß $L_D(V_0)$ die von der Drehung $\varphi(z) := \lambda z$ erzeugte n-elementige Drehungsgruppe ist.

Wegen $\mathrm{ord}(\mathrm{Aut}(V_0)) = \mathrm{ord}(K_p)\cdot \mathrm{ord}(L_D(V_0)) = p\cdot n$ und der trivialen Tatsache, daß die Transformation

$$V_0 \ni (x,y) \longmapsto (\lambda^j x, \eta^k y) \in V_0$$

mit $\eta = e^{2\pi i/p}$, $0 \le j \le n-1$, $0 \le k \le p-1$, biholo morph und paarweise verschieden sind und alle P_∞^0 als Fixpunkt besitzen, folgt, daß jedes $f \in Aut(V_0)$ den Punkt P_∞^0 als Fixpunkt besitzt.

Also führt die Gleichung (14): $A_0 \circ A^{-1} \circ A_0'^{-1}(P_\infty^0) = (1,0)$ auf einen Widerspruch. Der Fall 2 kann also nicht eintreten. Damit ist Theorem 2.1. bewiesen. □

Das Pendant zu Theorem 1.2. lautet:

<u>THEOREM 2.2.:</u> Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2p+1$. Weiter seien $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen und V die gleichungsdefinierte Riemannsche Fläche

$$V: \; y^n = (x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_p).$$

Sei $K = \{\tilde{\eta}^j : V \ni (x,y) \mapsto (x, \eta^j y) \in V \mid \eta = e^{\frac{2\pi i}{n}};\; 0 \leq j \leq n-1\}$

die Decktransformationsgruppe von V bzgl. x und L die folgende endliche Untergruppe von $Aut(\mathbb{C})$:

$$L := \{B \in Aut(\mathbb{C}) \mid B(\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}\}.$$

Zu jedem $A \in Aut(V)$ gibt es genau ein $B(A) \in Aut($ mit $x \circ A = B(A) \circ x$. Die Abbildung $\tau: Aut(V) \rightarrow$ $A \mapsto B(A)$ ist dann ein Gruppenhomomorphismus, und es gilt weiter:

Die Sequenz

$$1 \longrightarrow K \xhookrightarrow{\text{inkl.}} Aut(V) \xrightarrow{\tau} L \longrightarrow 1$$

ist exakt.

<u>BEWEIS:</u> Daß L eine Gruppe ist, ist klar. Da ein $\mathbb{P}^1$- Automorphismus auf drei verschiedenen Punkten bereits eindeutig festgelegt ist, folgt auch sofort: $\operatorname{ord}(L) < \infty$.

Nach Bemerkung 2.1. gibt es zu jedem $A \in Aut(V)$ genau ein $B(A) \in Aut(\mathbb{C})$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "x"'] & V \arrow[d, "x"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "B(A)"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. $x \circ A = B(A) \circ x$.

Ersichtlich gilt: $B(A) \in L$. Die Abbildung τ ist also wohldefiniert.

Seien nun $A_1, A_2 \in Aut(V)$. Dann kommutiert das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "x"] & V \arrow[r, "A_2"] \arrow[d, "x"] & V \arrow[d, "x"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "B(A_1)"] & \mathbb{P}^1 \arrow[r, "B(A_2)"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}.$$

Es gilt also : $\chi \circ A_2 \circ A_1 = B(A_2) \circ B(A_1) \circ \chi$. Hieraus folgt $B(A_2 \circ A_1) = \tau(A_2 \circ A_1) = B(A_2) \circ B(A_1) = \tau(A_2) \circ \tau(A_1)$

d.h. : τ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Zu zeigen ist noch :

(i) Bild $(\tau) = L$ und

(ii) Kern $(\tau) = K$.

<u>zu (i):</u> Sei $B \in L$ mit $B(z) = az + b$ $(a \neq 0)$. Da die Abbildung

$$\psi_B : V \longrightarrow V \; ; \; (x, y) \longmapsto (B(x), \sqrt[n]{a^p}\, y)$$

biholomorph ist mit $\chi \circ \psi_B = B \circ \chi$, folgt : $\tau(\psi_B) = B$.
Also gilt Bild $(\tau) = L$.

<u>zu (ii):</u> Dies folgt wörtlich wie im Beweis zu Theorem 1.2.

Damit ist Theorem 2.2. bewiesen. □

Als triviale Folgerung erhält man :

<u>BEMERKUNG 2.2.:</u> Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.2. gilt : $\operatorname{ord}(\operatorname{Aut}(V)) = n \cdot \operatorname{ord}(L)$.
Dabei sieht man, daß L von der geometrischen Lage der Punkte $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ abhängt. □

Wie in Teil 1 werden im Fall $p = 3$ die Riemannschen

Flächen, die durch Theorem 2.1. nicht mehr erfaßt werden, auf biholomorphe Äquivalenz untersucht. Man erhält für $p=3$ folgendes Ergebnis:

<u>COROLLAR 2.1.:</u> Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl mit $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Weiter seien $\lambda, \mu \notin \{0,1\}$ komplexe Zahlen und V_λ, V_μ die gleichungsdefinierten Riemannschen Flächen

$$V_\lambda : \; y^n = x(x-1)(x-\lambda),$$

$$V_\mu : \; y^n = x(x-1)(x-\mu).$$

V_λ und V_μ sind genau dann biholomorph äquivalent wenn gilt: $\mu \in \{\lambda, 1/\lambda, 1-\lambda, 1/(1-\lambda), (\lambda-1)/\lambda, \lambda/(\lambda-1$

<u>BEWEIS:</u> Da ein $\mathbb{P}^1$-Automorphismus bereits auf drei Punkten eindeutig festgelegt ist, folgt, daß die Bedingung für μ äquivalent zur Existenz eines Automorphismus $B \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $B(\{0,1,\lambda\}) = \{0,1,\mu\}$ ist. Für $n \geq 7$ ist die Aussage des Corollars also bereits in Theorem 2.1. enthalten.

Für $n \in \{2,4,5\}$ gilt „$\Leftarrow$", da für diese Richtung die Voraussetzung $n \geq 2p+1$ in Theorem 2.1. überflüssig ist.

Es verbleibt also nur noch, „$\Rightarrow$" in den Fällen $n = 2, 4, 5$ zu zeigen.

Sei $\underline{n=5}$.

In diesem Fall ist das Geschlecht $g = \frac{1}{2}(p-1)(n-1)$ von V_λ (und V_μ) gleich 4.

Nach Lemma 2.1. ist $\left\{\frac{1}{y^4}dx, \frac{x}{y^4}dx, \frac{1}{y^3}dx, \frac{1}{y^2}dx\right\}$ eine Basis von $\Omega(V_\lambda)$. Eine analoge Basis erhält man für $\Omega(V_\mu)$.

Die kanonische Einbettung von V_λ in $\mathbb{P}^{4-1} = \mathbb{P}^3$ ist gegeben durch

$$V_\lambda \ni (x,y) \mapsto \left(\frac{1}{y^4} : \frac{x}{y^4} : \frac{1}{y^3} : \frac{1}{y^2}\right) = (1 : x : y : y^2) \in \mathbb{P}^3.$$

V_λ wird mit dem Bild der Einbettung, also der singularitätenfreien kanonischen Kurve, identifiziert.

Bezeichnet man die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}^3$ mit $(Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3)$ und betrachtet die Quadrik $Q : Z_2^2 = Z_0 Z_3$, so gilt:

<u>NOTIZ 2.4.:</u>

(i) V_λ ist nicht hyperelliptisch.

(ii) $V_\lambda \subset Q$.

(iii) Q ist singulär.

<u>BEWEIS:</u>

<u>zu (i):</u> Da $y \in Mer_3(V_\lambda)$ gilt und das Geschlecht

von V_λ gleich 4 ist, ist V_λ nicht hyperelliptisch.

zu (ii): Für die homogenen Koordinaten von V_λ gilt: $Z_2^2 = y^2 = Z_0 Z_3$.

zu (iii): Ersichtlich liegt $(0:1:0:0)$ in Q. In diesem Punkt verschwinden aber sämtliche partiellen Ableitungen des Q definierenden homogenen Polynoms $F(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) = Z_2^2 - Z_0 Z_3$. □

Wegen Notiz 2.4. läßt sich Satz 1.12* a*) [oder auch Satz 1.12 a)] auf V_λ anwenden, und man erhält:

$$\operatorname{card}\left(\mathbb{G}_3^1(V_\lambda)\right) = 1.$$

Nach Satz 1.7.* gilt:

$$\operatorname{card}\left(\operatorname{Mer}_3(V_\lambda)/\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)\right) = \operatorname{card}\left(\mathbb{G}_3^1(V_\lambda) - \mathbb{F}_3^1(V_\lambda)\right)$$

Wegen $y \in \operatorname{Mer}_3(V_\lambda)$ und $\operatorname{card}(\mathbb{G}_3^1(V_\lambda)) = 1$, besteht also der Orbitraum $\operatorname{Mer}_3(V_\lambda)/\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)$ aus genau einem Element, d.h.:

(15) $\{B \circ y \mid B \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)\} = \{C \circ f \mid C \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)\} \quad (\forall f \in \operatorname{Mer}_3(V$

Sei P_∞^λ (bzw. P_∞^μ) der bzgl. x über ∞ gelegene Punkt auf V_λ (bzw. V_μ). Nach Lemma 2.2. gilt:

(16) $\{1, x, y\}$ ist eine Basis von $L(-5P_\infty^\lambda)$.

Seien nun V_λ und V_μ biholomorph äquivalent.

<u>Fall 1:</u> Es gibt eine biholomorphe Abbildung $A : V_\lambda \longrightarrow V_\mu$ mit $A(P_\infty^\lambda) = P_\infty^\mu$.

Es ist $y \circ A \in Mer_3(V_\lambda)$. Also gibt es nach (15) ein $E \in Aut(\mathbb{P}^1)$ mit $E \circ y = y \circ A$. Dies führt mit (16) auf die Stelle (✱) im Beweis zu Theorem 2.1. Wegen $A(P_\infty^\lambda) = P_\infty^\mu$ ist man dann bereits fertig.

<u>Fall 2:</u> Für jede biholomorphe Abbildung $A : V_\lambda \longrightarrow V_\mu$ gelte: $A(P_\infty^\lambda) \neq P_\infty^\mu$.

Eine solche biholomorphe Abbildung $A : V_\lambda \rightarrow V_\mu$ mit $A(P_\infty^\lambda) \neq P_\infty^\mu$ sei fest gewählt. Man gelangt dann an die Stelle (✱✱) im Beweis zu Theorem 2.1. Zu dem fest gewählten A gibt es dann biholomorphe Abbildungen

$$A_0 : V_\lambda \longrightarrow V_0 : y^3 = x^5 - 1 \quad \text{und}$$

$$A_0' : V_\mu \longrightarrow V_0 : y^3 = x^5 - 1 \quad \text{mit (s. (14))}$$

$$A_0 \circ A^{-1} \circ A_0'^{-1}(P_\infty^0) = (1, 0).$$

Bezeichnet man mit $Bihol(V_\mu, V_\lambda)$ die Menge aller biholomorphen Abbildungen $f : V_\mu \rightarrow V_\lambda$, so gilt:

$$Aut(V_0) = \{A_0 \circ f \circ A_0'^{-1} \mid f \in Bihol(V_\mu, V_\lambda)\}.$$

„$\supset$" ist klar.

„$\subset$": Sei $h \in Aut(V_0)$. Mit $f = A_0^{-1} \circ h \circ A_0' \in Bihol(V_\lambda, V_\mu)$
gilt $h = A_0 \circ f \circ A_0'^{-1}$. $\square$

Wegen $A_0(P_\infty^\lambda) = P_\infty^0$ und $A_0'(P_\infty^\mu) = P_\infty^0$ (s. (14))
folgt aber aus $Aut(V_0) = \{A_0 \circ f \circ A_0'^{-1} \mid f \in Bihol(V_\mu, V_\lambda)\}$,
daß kein einziges $h \in Aut(V_0)$ den Punkt P_∞^0 als
Fixpunkt besitzt. Widerspruch zu $id_{V_0}(P_\infty^0) = P_\infty^0$.

Fall 2 kann also nicht eintreten. Somit ist
Corollar 2.1. für $n = 5$ bewiesen.

Sei nun $\underline{n = 4}$.

Nach Lemma 2.1. (i) besitzt V_λ (und somit auch
V_μ) das Geschlecht $g = 3$. Da zudem $y \in Mer_3(V_\lambda)$
gilt, folgt:

<u>NOTIZ 2.5.:</u> V_λ (und somit auch V_μ) ist nicht
hyperelliptisch. $\square$

Der Beweis zu Lemma 2.1. hat ergeben, daß x
voll über $0, 1, \lambda$ und ∞ verzweigt. Seien
P_0, P_1, P_λ und P_∞^λ die bzgl. x über $0, 1, \lambda$ und
∞ gelegenen Punkte auf V_λ. Für den Divisor (y)
erhält man:

$$(y) = P_0 + P_1 + P_\lambda - 3P_\infty^\lambda .$$

Sei $Q \in \{P_0, P_1, P_\lambda\}$.

$\frac{1}{x-Q}$ besitzt in Q einen Pol der Ordnung 4 und is

ansonsten holomorph.

$\frac{y}{x-Q}$ besitzt in Q einen Pol der Ordnung 3 und

ansonsten holomorph.

Die Lückenfolge in Q ist also $(1,2,5)$. Auf Grun
des Weierstraß'schen Lückensatzes ist also jedes
$Q \in \{P_0, P_1, P_\lambda\}$ ein Weierstraß-Punkt vom Ge
wicht $(1-1)+(2-2)+(5-3)=2$.

y besitzt in P_∞^λ einen Pol der Ordnung 3 und i
ansonsten holomorph.

x besitzt in P_∞^λ einen Pol der Ordnung 4 und is
ansonsten holomorph.

Die Lückenfolge in P_∞^λ ist also ebenfalls $(1,2,5)$
und P_∞^λ daher ebenfalls ein Weierstraß-Punkt
vom Gewicht 2.

Nach Lemma 2.1.(ii) bilden die Differentialform

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^2}, \quad \omega_2 = \frac{dx}{y^3} \quad \text{und} \quad \omega_3 = \frac{x\,dx}{y^3}$$

eine Basis von $\Omega(V_\lambda)$. Eine analoge Basis erhä
man für $\Omega(V_\mu)$.

Um jeden Punkt $Z \in V_\lambda$ mit $Z \notin \{P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty^\lambda\}$ kann man x als Karte wählen. Für jedes $Z \in V_\lambda - \{P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty^\lambda\}$ hat dann also die Wronski-Determinante $W_Z(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ die Gestalt:

$$W_Z(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y^2} & \frac{1}{y^3} & \frac{x}{y^3} \\ \left(\frac{1}{y^2}\right)' & \left(\frac{1}{y^3}\right)' & \left(\frac{x}{y^3}\right)' \\ \left(\frac{1}{y^2}\right)'' & \left(\frac{1}{y^3}\right)'' & \left(\frac{x}{y^3}\right)'' \end{vmatrix} .$$

<u>NOTIZ 2.6.:</u> Für $Z \in V_\lambda - \{P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty^\lambda\}$ gilt:

$$W_Z(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \frac{y''}{y^9} .$$

<u>BEWEIS:</u> Es gilt:

a) $$\left(\frac{1}{y^2}\right)' = \frac{-2yy'}{y^4} = \frac{-2y'}{y^3} ,$$

b) $$\left(\frac{1}{y^2}\right)'' = \left(\frac{-2y'}{y^3}\right)' = \frac{-2y''y^3 + 2y'\cdot(y^3)'}{y^6} =$$

$$\frac{-2y''y^3 + 6y'y^2y'}{y^6} = \frac{-2y''y + 6y'^2}{y^4} ,$$

c) $$\left(\frac{1}{y^3}\right)' = \frac{-3y^2y'}{y^6} = \frac{-3y'}{y^4} ,$$

d) $\left(\frac{1}{y^3}\right)'' = \left(\frac{-3y'}{y^4}\right)' = \frac{-3y''y^4 + 3y' \cdot 4y^3y'}{y^5} =$

$\frac{-3y''y + 12y'^2}{y^5}$,

e) $\left(\frac{x}{y^3}\right)' = \frac{y^3 - x \cdot 3y^2y'}{y^6} = \frac{y - 3xy'}{y^4}$,

$\left(\frac{x}{y^3}\right)'' = \left(\frac{y - 3xy'}{y^4}\right)' =$

$\frac{(y' - 3y' - 3y''x)y^4 - (y - 3xy') \cdot 4y^3y'}{y^8} =$

$\frac{(-2y' - 3y''x)y - 4(y - 3xy')y'}{y^5} =$

$\frac{-6yy' - 3yy''x + 12xy'^2}{y^5}$.

Es folgt:

$$W_Z(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = xy \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{y^3} & \frac{1}{y^3} & \frac{1}{y^3} \\ \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y^2}\right)' & \left(\frac{1}{y^3}\right)' & \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y^3}\right)' \\ \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y^2}\right)'' & \left(\frac{1}{y^3}\right)'' & \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y^3}\right)'' \end{vmatrix} \underset{=}{[a) - f)}$$

$$xy\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{y^3} & \frac{1}{y^3} & \frac{1}{y^3} \\ \frac{-2y'}{y^4} & \frac{-3y'}{y^4} & \frac{y-3xy'}{xy^4} \\ \frac{-2y''y+6y'^2}{y^5} & \frac{-3y''y+12y'^2}{y^5} & \frac{-6yy'-3yy''x+12xy'^2}{xy^5} \end{vmatrix}$$

$$= xy\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^3} \\ \frac{y'}{y^4} & \frac{-y}{xy^5} & \frac{y-3xy'}{xy^4} \\ \frac{y''y-6y'^2}{y^5} & \frac{6yy'}{xy^5} & \frac{-6yy'-3yy''x+12xy'^2}{xy^5} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x}{y^2}\left(\frac{6yy'^2}{xy^9} + \frac{y^2y''}{xy^9} - \frac{6yy'^2}{xy^9}\right) = \frac{y''}{y^9}. \quad \square$$

Sei $F(x) := x(x-1)(x-\lambda)$. Wegen $y' = \frac{F'}{4y^3}$ gilt

$$y'' = \left(\frac{F'}{4y^3}\right)' = \frac{4F''y^3 - 12F'y^2y'}{16y^6} =$$

$$\frac{F''y - 3F'\left(\frac{F'}{4y^3}\right)}{4y^4} = \frac{F''y^4 - 3F'\cdot\frac{1}{4}F'}{4y^7} =$$

$$\frac{4F''F - 3F'^2}{16y^7}.$$

Die Weierstraß-Punkte W von V_λ mit $W \notin \{P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty^\lambda\}$ sind also genau die Punkte auf V_λ, deren x-Koordinat[e] eine Nullstelle des komplexen Polynoms

$$H(x) := 4F''(x)F(x) - 3(F'(x))^2 \text{ ist.}$$

Es gilt $F(x) = x^3 - (1+\lambda)x^2 + \lambda x$ und weiter:

$F'(x) = 3x^2 - 2(1+\lambda)x + \lambda$;

$F''(x) = 6x - 2(1+\lambda)$. Somit gilt:

$$4F''(x)F(x) =$$

$$4(6x^4 - 6(1+\lambda)x^3 + 6\lambda x^2 - 2(1+\lambda)x^3 + 2(1+\lambda)^2x^2 - 2\lambda(1+\lambda)x$$

$$= 24x^4 - 32(1+\lambda)x^3 + (24\lambda + 8(1+\lambda)^2)x^2 - 8\lambda(1+\lambda)x.$$

Weiter gilt:

$$3(F'(x))^2 =$$

$$3(9x^4 - 12(1+\lambda)x^3 + (6\lambda + 4(1+\lambda)^2)x^2 - 4\lambda(1+\lambda)x + \lambda^2) =$$

$$27x^4 - 36(1+\lambda)x^3 + (18\lambda + 12(1+\lambda)^2)x^2 - 12\lambda(1+\lambda)x + 3\lambda^2$$

Somit gilt:

$$H(x) = -3x^4 + 4(1+\lambda)x^3 + (6\lambda - 4(1+\lambda)^2)x^2 + 4\lambda(1+\lambda)x - 3\lambda^2 =$$

$$-3x^4 + 4(1+\lambda)x^3 - 2(2\lambda^2 + \lambda + 2)x^2 + 4\lambda(1+\lambda)x - 3\lambda^2$$

Da es nur auf die Nullstellen ankommt, kann man dieses Polynom O.B.d.A. als normiert ansehen; also:

$$H(x) = x^4 - \frac{4(1+\lambda)x^3}{3} + \frac{2(2\lambda^2+\lambda+2)x^2}{3} - \frac{4\lambda(1+\lambda)x}{3} + \lambda^2.$$

Jede Nullstelle dieses Polynoms definiert vier neue Weierstraß-Punkte auf V_λ. Es gilt nun:

NOTIZ 2.7.: Gilt $\lambda \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$, so besitzt V_λ außer $P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty^\lambda$ acht weitere Weierstraß-Punkte, die alle vom Gewicht 2 sind.
Gilt $\lambda \notin \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$, so besitzt V_λ außer $P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty^\lambda$ sechzehn weitere Weierstraß-Punkte die alle vom Gewicht 1 sind.

BEWEIS: Substituiert man $x = z + \frac{(1+\lambda)}{3}$, so gilt:

$$x^2 = z^2 + \frac{2(1+\lambda)z}{3} + \frac{(1+\lambda)^2}{9},$$

$$x^3 = z^3 + (1+\lambda)z^2 + \frac{(1+\lambda)^2 z}{3} + \frac{(1+\lambda)^3}{27} \quad \text{und}$$

$$x^4 = z^4 + \frac{4(1+\lambda)z^3}{3} + \frac{2(1+\lambda)^2 z^2}{3} + \frac{4(1+\lambda)^3 z}{27} + \frac{(1+\lambda)^4}{81}.$$

Es gilt dann also: $L(z) := H(x) =$

$$z^4 + \frac{4(1+\lambda)}{3}z^3 + \frac{2(1+\lambda)^2}{3}z^2 + \frac{4(1+\lambda)^3}{27}z + \frac{(1+\lambda)^4}{81} -$$

$$- \frac{4(1+\lambda)}{3}\left(z^3 + (1+\lambda)z^2 + \frac{(1+\lambda)^2}{3}z + \frac{(1+\lambda)^3}{27}\right) +$$

$$+ \frac{2(2\lambda^2+\lambda+2)}{3}\left(z^2 + \frac{2(1+\lambda)}{3}z + \frac{(1+\lambda)^2}{9}\right) -$$

$$- \frac{4(1+\lambda)\lambda}{3}\left(z + \frac{(1+\lambda)}{3}\right) + \lambda^2 \quad =$$

$$z^4 + \frac{4(1+\lambda)}{3} z^3 + \frac{2(1+\lambda)^2}{3} z^2 + \frac{4(1+\lambda)^3}{27} z +$$

$$+ \frac{(1+\lambda)^4}{81} - \frac{4(1+\lambda)}{3} z^3 - \frac{4(1+\lambda)^2}{3} z^2 - \frac{4(1+\lambda)^3}{9} z -$$

$$- \frac{4(1+\lambda)^4}{81} + \frac{2(2\lambda^2+\lambda+2)}{3} z^2 + \frac{4(1+\lambda)(2\lambda^2+\lambda+2)}{9} z +$$

$$+ \frac{2(2\lambda^2+\lambda+2)(1+\lambda)^2}{27} - \frac{4(1+\lambda)\lambda}{3} z - \frac{4(1+\lambda)^2 \cdot \lambda}{9} + \lambda^2 =$$

$$z^4 + \left(\frac{2(2\lambda^2+\lambda+2) - 2(1+\lambda)^2}{3}\right) z^2 +$$

$$+ \left(\frac{12(1+\lambda)(2\lambda^2+\lambda+2) - 36(1+\lambda)\lambda - 8(1+\lambda)^3}{27}\right) z +$$

$$+ \frac{27\lambda^2 - 12(1+\lambda)^2\lambda + 2(2\lambda^2+\lambda+2)(1+\lambda)^2 - (1+\lambda)^4}{27} =$$

$$z^4 + \left(\frac{2(\lambda^2-\lambda+1)}{3}\right) z^2 +$$

$$+ \left(\frac{4(1+\lambda)(3(2\lambda^2+\lambda+2) - 9\lambda - 2(1+2\lambda+\lambda^2))}{27}\right) z +$$

$$+ \frac{27\lambda^2 - (1+\lambda)^2(12\lambda - 4\lambda^2 - 2\lambda - 4 + 1 + 2\lambda + \lambda^2)}{27} =$$

$$z^4 + \left(\frac{2(\lambda^2-\lambda+1)}{3}\right) z^2 +$$

$$+ \left(\frac{4(1+\lambda)(6\lambda^2 + 3\lambda + 6 - 9\lambda - 2 - 4\lambda - 2\lambda^2)}{27}\right) z +$$

$$+\left(\frac{27\lambda^2-(1+\lambda)^2(-3\lambda^2+12\lambda-3)}{27}\right) =$$

$$z^4+\left(\frac{2(\lambda^2-\lambda+1)}{3}\right)z^2+\left(\frac{4(1+\lambda)(4\lambda^2-10\lambda+4)}{27}\right)z+$$

$$+\frac{27\lambda^2+3(1+\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda+1)}{27} =$$

$$z^4+\left(\frac{2(\lambda^2-\lambda+1)}{3}\right)z^2+\left(\frac{16(1+\lambda)(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-2)}{27}\right)z+$$

$$+\frac{9\lambda^2+(1+\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda+1)}{9}$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{wegen } 9\lambda^2+(1+\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda+1) = \\ \lambda^4-2\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda+1 = (\lambda^2-\lambda+1)^2\end{array}\right]$$

$$z^4+\left(\frac{2(\lambda^2-\lambda+1)}{3}\right)z^2+\left(\frac{16(1+\lambda)(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-2)}{27}\right)z+$$

$$+\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^2}{9}\,.$$

Aus der Algebra ist bekannt, daß für die Diskriminante $Dis(h(x))$ eines (komplexen) Polynoms $h(x) = x^4+px^2+qx+r$ gilt:

$$Dis(h(x)) = 16p^4r-4p^3q^2-128p^2r^2+144pq^2r-27q^4+256r^3.$$

Im Falle des Polynoms $L(z) = H(x)$ gilt:

$$p = \frac{2(\lambda^2-\lambda+1)}{3},$$

$$q = \frac{16(1+\lambda)(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-2)}{27} \quad \text{und}$$

$$r = \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^2}{9} \quad . \quad \text{Somit gilt:}$$

$\mathrm{Dis}(L(z)) =$

$$16\left(\frac{16(\lambda^2-\lambda+1)^6}{3^6}\right) -$$

$$-4\left(\frac{8(\lambda^2-\lambda+1)^3 \cdot 256(1+\lambda)^2(\lambda-\frac{1}{2})^2(\lambda-2)^2}{3^9}\right) -$$

$$-128\left(\frac{4(\lambda^2-\lambda+1)^6}{3^6}\right) +$$

$$+144\left(\frac{2(\lambda^2-\lambda+1)^3 \cdot 256(1+\lambda)^2(\lambda-\frac{1}{2})^2(\lambda-2)^2}{3^9}\right) -$$

$$-\left(\frac{16(1+\lambda)^4(\lambda-\frac{1}{2})^4(\lambda-2)^4}{3^9}\right) +$$

$$+256\left(\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^6}{3^6}\right).$$

Um die Werte zu ermitteln, für welche $\mathrm{Dis}(L(z))$ verschwindet, genügt es, die Nullstellen des folgenden Polynoms $f(\lambda)$ zu bestimmen:

$f(\lambda) =$

$$3^3 \cdot 2^8(\lambda^2-\lambda+1)^6 - 2^5(\lambda^2-\lambda+1)^3(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)$$

$$-3^3 \cdot 2^9(\lambda^2-\lambda+1)^6 + 3^2 \cdot 2^5(\lambda^2-\lambda+1)^3(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)$$

$$-2^8(1+\lambda)^4(\lambda-\tfrac{1}{2})^4(\lambda-2)^4 + 3^3 \cdot 2^8(\lambda^2-\lambda+1)^6$$

$$= \left[3^3\cdot 2^8 - 3^3\cdot 2^9 + 3^3\cdot 2^8 = 0\right]$$

$$\left(-2^5(\lambda^2-\lambda+1)^3+3^2\cdot 2^5(\lambda^2-\lambda+1)^3-2^8(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)^2\right)\cdot$$

$$\cdot(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)^2 \quad =$$

$$2^8\left((\lambda^4-2\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)-(1+2\lambda+\lambda^2)(\lambda^2-\lambda+\tfrac{1}{4})(\lambda^2-4\lambda+4)\right)\cdot$$

$$\cdot(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)^2 \quad =$$

$$2^8\left[\lambda^6-2\lambda^5+3\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2-\lambda^5+2\lambda^4-3\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+\lambda^4-2\lambda^3+\right.$$

$$\left.+3\lambda^2-2\lambda+1-(\lambda^2-\lambda+\tfrac{1}{4}+2\lambda^3-2\lambda^2+\tfrac{1}{2}\lambda+\lambda^4-\lambda^3+\tfrac{1}{4}\lambda^2)(\lambda^2-4\lambda+4)\right]$$

$$\cdot(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)^2 \quad =$$

$$2^8\left[\lambda^6-3\lambda^5+6\lambda^4-7\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+1-(\lambda^4+\lambda^3-\tfrac{3}{4}\lambda^2-\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{4})(\lambda^2-4\lambda+4)\right]\cdot$$

$$\cdot(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)^2 \quad =$$

$$2^8\left[\lambda^6-3\lambda^5+6\lambda^4-7\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+1-(\lambda^6+\lambda^5-\tfrac{3}{4}\lambda^4-\tfrac{1}{2}\lambda^3+\tfrac{1}{4}\lambda^2-\right.$$

$$\left.-4\lambda^5-4\lambda^4+3\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+4\lambda^4+4\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda+1)\right]\cdot$$

$$\cdot(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)^2 \quad =$$

$$2^8\left[\lambda^6-3\lambda^5+6\lambda^4-7\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda+1-(\lambda^6-3\lambda^5-\tfrac{3}{4}\lambda^4+\tfrac{13}{2}\lambda^3-\right.$$

$$\left.-\tfrac{3}{4}\lambda^2-3\lambda+1)\right]\cdot(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)^2 \quad =$$

$$2^8\left(\frac{27}{4}\lambda^4 - \frac{27}{4}\lambda^3 + \frac{27}{4}\lambda^2\right)(1+\lambda)^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2(\lambda-2)^2 =$$

$$27\cdot 64\,(\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2)(1+\lambda)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)^2 =$$

$$27\cdot 64\,\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2(\lambda-\tfrac{1}{2})^2(\lambda-2)^2 .$$

Also besitzt $L(z) = H(x)$ dann und nur dann eine mehrfache Nullstelle, wenn gilt: $\lambda \in \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$

Da bereits nach Voraussetzung $\lambda \notin \{0,1\}$ gilt, interessiert hier nur der Fall $\lambda \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$.

Setzt man $\lambda = -1$ in das normierte Polynom $H(x)$ ein, so erhält man:

$$H(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x-i)^2(x+i)^2.$$

Setzt man $\lambda = \frac{1}{2}$ in das normierte Polynom $H(x)$ ein, so erhält man:

$$H(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1+i}{2}\right)^2\left(x - \frac{1-i}{2}\right)^2.$$

Setzt man $\lambda = 2$ in das normierte Polynom $H(x)$ ein, so erhält man:

$$H(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = (x-(1+i))^2(x-(1-i))^2$$

Gilt also $\lambda \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$, so besitzt V_λ außer $P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty^\lambda$ noch acht weitere Weierstraß-Punkte vom Gewicht 2, da x eine 4-blättrige Überlagerung von $\mathbb{P}^1$ ist und die Nullstellen von $H(x)$ jeweils von zweifacher Ordnung sind.

Im Fall $\lambda \notin \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ besitzt $H(x)$ vier einfache Nullstellen. Somit besitzt V_λ in diesem Fall außer $P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty^\lambda$ noch sechzehn weitere Weierstraß-Punkte, die das Gewicht 1 besitzen.

Damit ist Notiz 2.7. bewiesen. $\square$

Es werden nun drei Fälle unterschieden.

<u>Fall 1:</u> $(\lambda \notin \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ und $\mu \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\})$
oder $(\lambda \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ und $\mu \notin \{-1, \frac{1}{2}, 2\})$.

Nach Notiz 2.7. können dann V_λ und V_μ nicht biholomorph äquivalent sein, da biholomorphe Abbildungen Weierstraß-Punkte vom Gewicht w wieder in solche Punkte überführen.

<u>Fall 2:</u> $\lambda \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ und $\mu \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$.

Dann gilt bereits $\mu \in \{\lambda, 1/\lambda, 1-\lambda, 1/(1-\lambda), (\lambda-1)/\lambda, \lambda/(\lambda-1$
und es ist nichts mehr zu zeigen.

<u>Fall 3:</u> $\lambda \notin \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ und $\mu \notin \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$.

Sei $f: V_\lambda \longrightarrow V_\mu$ biholomorph. Da f Weierstraß-Punkte vom Gewicht w wieder auf solche Punkte abbildet, folgt auf Grund von Notiz 2.7.:

$f(\{P_0, P_1, P_\lambda, P_\infty^\lambda\}) = \{P_0, P_1, P_\mu, P_\infty^\mu\}$.

Es gilt $x(f(P_\infty^\lambda)) \in \{0, 1, \mu, \infty\}$. Man kann stets einen Automorphismus $C \in Aut(\mathbb{P}^1)$ finden mit $C(x(f(P_\infty^\lambda))) = \infty$ und $C(\{0,1,\mu,\infty\}) = \{0,1,\mu,\infty\}$

1.) Ist $x(f(P_\infty^\lambda)) = 0$, so kann man $C(z) = \frac{\mu}{z}$ wählen

2.) Ist $x(f(P_\infty^\lambda)) = 1$, so kann man $C(z) = \frac{z-\mu}{z-1}$ wähle

3.) Ist $x(f(P_\infty^\lambda)) = \mu$, so kann man $C(z) = \frac{\mu z - \mu}{z - \mu}$ wähle

4.) Ist $x(f(P_\infty^\lambda)) = \infty$, so wähle man $C = id$.

Nach Lemma 2.2. ist $\{1, x, y\}$ eine Basis von $L(-4P_\infty^\lambda)$. Da f biholomorph ist, folgt $C \circ x \circ f \in L(-4P_\infty^\lambda)$. Es gibt also komplexe Zahlen α, β, γ mit

$$C \circ x \circ f = \alpha + \beta x + \gamma y$$

Wegen $\gamma y(P_\infty^\lambda) = \infty$ und $\gamma y(Z) = 0$ für $Z \in \{P_0, P_1, P$ folgt nun unmittelbar:

$B(z) := \alpha + \beta z$ ist ein $\mathbb{P}^1$-Automorphismus mit $B(\infty) = \infty$ und $B(\{0,1,\lambda\}) = \{0,1,\mu\}$, d.h.:

$\mu \in \{\lambda, 1/\lambda, 1-\lambda, 1/(1-\lambda), (\lambda-1)/\lambda, \lambda/(\lambda-1)\}$

Damit ist Corollar 2.1. auch für $n = 4$ bewiesen.

Der verbleibende Fall <u>$n = 2$</u> schließlich, d.h. die Riemannschen Flächen V_λ und V_μ sind Tori, ist bereits mit Satz 1.2. erledigt worden.

Damit ist Corollar 2.1. vollständig bewiesen. □

Es wird nun überprüft, ob Theorem 2.2. in den Fällen $(p,n) = (3,2)$, $(p,n) = (3,4)$ und $(p,n) = (3,5)$ noch gültig bleibt.

Im Fall $(p,n) = (3,2)$ ist V_λ ein Torus. Jeder Torus besitzt eine unendliche Automorphismengruppe. Also gilt die Aussage von Theorem 2.2. in diesem Fall für keine einzige Riemannsche Fläche V_λ.

Im Fall $(p,n) = (3,4)$ gilt:

<u>SATZ 2.1.:</u> [s. Kuribayashi A./Yoshida K. [1]; Theorem 2, S. 27].

Die Riemannsche Fläche V_λ sei gleichungsdefiniert durch $V_\lambda : y^4 = x(x-1)(x-\lambda) \quad (\lambda \notin \{0,1\})$.

(i) Für $\lambda \in \{-1, 2, \frac{1}{2}\}$ gilt: $\operatorname{ord}(\operatorname{Aut}(V_\lambda)) = 96$.
(ii) Für $\lambda \in \{(1+\sqrt{3}i)/2, (1-\sqrt{3}i)/2\}$ gilt:
$\operatorname{ord}(\operatorname{Aut}(V_\lambda)) = 48$
(iii) Für alle sonstigen λ gilt: $\operatorname{ord}(\operatorname{Aut}(V_\lambda)) = 16$. □

Aus Satz 2.1. folgt bereits die erste Aussage von

COROLLAR 2.2.:

(i) Im Fall $(p,n) = (3,4)$ wird die Aussage von Theorem 2.2. für jede Riemannsche Fläche $V_\lambda : y^4 = x(x-1)(x-\lambda)$ falsch.

(ii) Im Fall $(p,n) = (3,5)$ bleibt [illegible] Theorem 2.2. für jede Riemannsche Fläch $V_\lambda : y^5 = x(x-1)(x-\lambda)$ gültig.

BEWEIS:

zu (i): Für die Decktransformationsgruppe K v V_λ bzgl. $x : V_\lambda \to \mathbb{P}^1$ gilt: $\mathrm{ord}(K) = 4$. Für Gruppe $L = \{B \in Aut(\mathbb{C}) \mid B(\{0,1,\lambda\}) = \{0,1,\lambda\}$ gilt ersichtlich $\mathrm{ord}(L) = 6$.

Würde Theorem 2.2. gültig bleiben, so müßte $\mathrm{ord}(Aut(V_\lambda)) = 24$ gelten, was nach Satz 2.1 nicht möglich ist.

zu (ii): Wegen (15) und (16) von S. 134 kann man wie im Beweis zu Theorem 2.1. argumentieren.

Fall 1: Für jede biholomorphe Abbildung $A : V_\lambda \to$ gelte $A(P_\infty^\lambda) = P_\infty^\lambda$.

Dann bleibt Bemerkung 2.1. gültig, und der Bewe zu Theorem 2.2. läßt sich wörtlich übertrag

Fall 2: Es gebe eine biholomorphe Abbildung

$A : V_\lambda \to V_\lambda$ mit $A(P_\infty^\lambda) \neq P_\infty^\lambda$.

Man gelangt dann an die Stelle (**) des Beweises zu Theorem 2.1. und findet biholomorphe Abbildungen

$$A_0 : V_\lambda \to V_0 : y^3 = x^5 - 1 \quad \text{und}$$

$$A_0' : V_\lambda \to V_0 : y^3 = x^5 - 1 \quad \text{mit [s. (14)]}$$

$$A_0 \circ A^{-1} \circ A_0'^{-1}(P_\infty^0) = (1, 0).$$

Nach Lemma 2.1. ist $\left\{ \frac{dx}{y^2}, \frac{dx}{y}, \frac{x\,dx}{y^2}, \frac{x^2 dx}{y^2} \right\}$ eine Basis von $\Omega(V_0)$.

Die kanonische Einbettung von V_0 in $\mathbb{P}^{4-1} = \mathbb{P}^3$ ist gegeben durch

$$V_0 \ni (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{y^2} : \frac{1}{y} : \frac{x}{y^2} : \frac{x^2}{y^2} \right) = (1 : y : x : x^2) \in \mathbb{P}^3.$$

Bezeichnet man die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}^3$ mit $(Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3)$ und betrachtet die Quadrik $Q : Z_2^2 = Z_0 Z_3$, so erhält man

NOTIZ 2.8.:

(i) V_0 ist nicht hyperelliptisch.

(ii) $V_0 \subset Q$.

(iii) Q ist singulär.

BEWEIS: zu (i): Das Geschlecht von V_0 ist gleich

4 und es gilt $x \in \mathrm{Mer}_3(V_0)$. Also ist V_0 nicht hyperelliptisch.

<u>zu (ii):</u> Für die homogenen Koordinaten von V_0 gilt: $Z_2^2 = x^2 = Z_0 Z_3$.

<u>zu (iii):</u> Wurde bereits in Notiz 2.4.(iii) gezeigt. $\square$

Auf Grund von Notiz 2.8. läßt sich Satz 1.12*a*) anwenden, d.h.: $\mathrm{card}(\mathfrak{G}_3^1(V_0)) = 1$. Also ist nach Notiz 1.11. V_0 biholomorph äquivalent zu einer Riemannschen Fläche vom Typ (I).

Sei K die Decktransformationsgruppe von V_0 bzgl. $x : V_0 \to \mathbb{P}^1$. Es gilt $\mathrm{ord}(K) = 3$.

Weiter sei $\varkappa = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ und

$L = \{B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid B(\{\varkappa^1, \dots, \varkappa^5, \infty\}) = \{\varkappa^1, \dots, \varkappa^5, \infty\}\}$.

Wegen $n > 3$ läßt sich Notiz 2.3. anwenden, und man erhält: $B(\infty) = \infty$ für alle $B \in L$. Mithin gilt: $\mathrm{ord}(L) = 5$.

Somit gilt nach Corollar 1.4.:

$\mathrm{ord}(\mathrm{Aut}(V_0)) = \mathrm{ord}(K) \cdot \mathrm{ord}(L) = 3 \cdot 5 = 15$.

Dann sind aber sämtliche Automorphismen aus $\mathrm{Aut}(V_0)$ bereits gegeben durch:

$V_0 \ni (x,y) \longmapsto (\varkappa^j x, \eta^k y) \in V_0$ mit $\eta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$,

$0 \leq j \leq 4$ und $0 \leq k \leq 2$. Diese Automorphismen besitzen aber alle P_∞° als Fixpunkt. Dies ist ist ein Widerspruch zu $A_0 \circ A^{-1} \circ A_0'^{-1}(P_\infty^\circ) = (1,0)$. Fall 2 kann also nicht eintreten. Damit ist Corollar 2.2. bewiesen. $\square$

Auch in Teil 2 hat sich die eingangs geäußerte Vermutung bestätigt, daß sich die biholomorphen Äquivalenzklassen der betreffenden kompakten Riemannschen Flächen vollständig durch die Punkte beschreiben lassen, über denen die kanonische meromorphe Projektion x verzweigt.

TEIL 3

In diesem abschließenden Teil werden kompakte Riemannsche Flächen V, die gleichungsdefiniert sind durch

$$V : y^n = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n),$$

auf biholomorphe Äquivalenz untersucht. Dabei seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Es zeigt sich jedoch, daß man die Betrachtungen für den allgemeineren Fall singularitätenfreier Hyperflächen $V \subset \mathbb{P}^{r+1} := \mathbb{P}^{r+1}(\mathbb{C})$ vom Grad n durchführen kann, wobei V gleichungsdefiniert ist durch

$$V : X_{r+1}^n = F(X_0, \ldots, X_r)$$

mit einem homogenen Polynom F vom Grad n.

Das zentrale Resultat lautet:

<u>THEOREM 3.1.:</u> Seien $V, W \subset \mathbb{P}^{r+1}$ singularitätenfreie Hyperflächen vom Grad n, die gleichungsdefiniert sind durch

$$V : X_{r+1}^n = F(X_0, \ldots, X_r), \quad W : X_{r+1}^n = G(X_0, \ldots, X_r)$$

mit homogenen Polynomen F, G vom Grad n.
Sei weiter $(n, r) \neq (4, 2)$. Dann gilt:

V und W sind genau dann biholomorph äquivalent, wenn es einen Automorphismus $\mathcal{B} \in Aut(\mathbb{P}^\tau)$ gibt mit $\mathcal{B}(\{F=0\}) = \{G=0\}$.

<u>BEMERKUNG:</u> Es ist im Fall $(n,\tau) = (4,2)$, d.h. für singularitätenfreie Quartiken $Q \subset \mathbb{P}^3$, nicht bekannt, ob Theorem 3.1. gültig bleibt. □

In Theorem 3.1. ist die folgende Aussage über kompakte Riemannsche Flächen enthalten.

<u>THEOREM 3.1.*:</u> Seien V, W kompakte Riemannsche Flächen, die gleichungsdefiniert sind durch

$$V: y^n = (x-\alpha_1)\cdot \dots \cdot (x-\alpha_n) \quad \text{und}$$

$$W: y^n = (x-\beta_1)\cdot \dots \cdot (x-\beta_n),$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (bzw. $\beta_1, \dots, \beta_n$) paarweise verschiedene komplexe Zahlen seien. Dann gilt:

V und W sind genau dann biholomorph äquivalent, wenn es einen Automorphismus $\mathcal{B} \in Aut(\mathbb{P}^1)$ gibt mit $\mathcal{B}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. □

Als Trivialität sei erwähnt:

<u>NOTIZ 3.1.:</u> Ist V definiert wie in Theorem 3.1., so ist auch $\{F=0\}$ eine singularitätenfreie Varietät. □

Bevor Theorem 3.1. bewiesen wird, werden die wesentlichsten Beweishilfsmittel bereitgestellt und einige Hilfssätze bewiesen.

Zuvor jedoch werden einige Konventionen eingeführt.

<u>KONVENTION:</u>

(i) Eine projektive Transformation $f \in Aut(\mathbb{P}^{r+1})$ wird häufig in Matrizenschreibweise (a_{ij}) dargestellt. Daß es sich hierbei in Wirklichkeit um Elemente der projektiv-linearen Gruppe $PGL(r+2, \mathbb{C})$ handelt, wird zu keinen Mißverständnissen führen.

(ii) Seien V, W Varietäten in $\mathbb{P}^{r+1}$. Ist dann $f: V \longrightarrow W$ biholomorph und die Restriktion einer projektiven Transformation, so möge f ein <u>projektiv-linearer Isomorphismus</u> heißen.

(iii) Sei $(a_{ij}) \in PGL(r+2, \mathbb{C})$ und f die hierdurch definierte projektive Transformation. Für jedes $(x_0 : \cdots : x_{r+1}) \in \mathbb{P}^{r+1}$ wird $f(x_0 : \cdots : x_{r+1})$ stets mit

$$\begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0,r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,0} & \cdots & a_{r+1,r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{r+1} \end{pmatrix}$$ bezeichnet.

(iv) Aus Gründen der besseren Unterscheidbarkeit werden in den folgenden Betrachtungen gelegentlich gleiche Räume unterschiedlich bezeichnet. Die nun folgenden Bezeichnungen bleiben im gesamten Teil 3 gültig.

Es gelte $\mathbb{P}_2^{\tau+1} := \mathbb{P}_1^{\tau+1} := \mathbb{P}^{\tau+1}$.

Die homogenen Koordinaten auf $\mathbb{P}_2^{\tau+1}$ werden mit $(X_0'' : \cdots : X_{\tau+1}'')$, die auf $\mathbb{P}_1^{\tau+1}$ mit $(X_0' : \cdots : X_{\tau+1}')$ bezeichnet.

$H \subset \mathbb{P}^{\tau+1}$ sei die Hyperebene $\{X_{\tau+1} = 0\}$,
$H' \subset \mathbb{P}_1^{\tau+1}$ sei die Hyperebene $\{X'_{\tau+1} = 0\}$ und
$H'' \subset \mathbb{P}_2^{\tau+1}$ sei die Hyperebene $\{X''_{\tau+1} = 0\}$.

Schließlich gelte für $P_\infty \in \mathbb{P}^{\tau+1}$, $P'_\infty \in \mathbb{P}_1^{\tau+1}$ und $P''_\infty \in \mathbb{P}_2^{\tau+1}$ die Vereinbarung:

$$P_\infty := P'_\infty := P''_\infty := (0 : \cdots : 0 : 1)$$

Der Beweis von Theorem 3.1. basiert nun ganz entscheidend auf folgendem Satz.

<u>SATZ 3.1.:</u> [s. Namba M. [1]; S. 332]
$V, W \subset \mathbb{P}^{\tau+1}$ seien singularitätenfreie Hyperflächen vom Grad n, die gleichungsdefiniert sind durch

$$V : X_{\tau+1}^n = F(X_0, \ldots, X_\tau), \quad W : X_{\tau+1}^n = G(X_0, \ldots, X_\tau)$$

mit homogenen Polynomen F, G vom Grad n.
Gilt dann

(i) $n \geq 4$, falls $r = 1$ oder

(ii) $n \geq 3$, falls $r = 2$ und $(n, r) \neq (4, 2)$,

so ist jede biholomorphe Abbildung $f: V \longrightarrow W$ die Restriktion einer eindeutig bestimmten projektiven Transformation $B \in Aut(\mathbb{P}^{r+1})$. □

<u>BEMERKUNG:</u> Im Fall (ii) findet man für $V = W$ einen Beweis der Existenzaussage in [Matsumura H./ Monsky P. [1]; Theorem 2, S. 352]. Die Eindeutigkeitsaussage folgt unmittelbar aus Satz 1.10. □

Die Aussage von Satz 3.1. kann man im Fall (i), d.h., die Hyperflächen V, W sind Riemannsche Flächen, wie folgt einsehen.

<u>Fall 1:</u> $n = 4$.

V und W sind dann also nicht-singuläre ebene Kurven vom Grad 4. Dehomogenisieren des V definierenden homogenen Polynoms $H(X_0, X_1, X_2) = X_2^4 - F(X_0, X_1)$ nach X_1 liefert das Polynom $K(X_0, X_2) = X_2^4 - F(X_0, 1)$. Aus der Singularitätenfreiheit von V folgt unmittelbar, daß für $K(X_0, X_2)$ nur die beiden folgenden Fälle eintreten können :

(1) $K(X_0, X_2) = X_2^4 - (X_0 - \alpha_1)(X_0 - \alpha_2)(X_0 - \alpha_3)$

mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oder

(2) $K(X_0, X_2) = X_2^4 - (X_0 - \alpha_1)(X_0 - \alpha_2)(X_0 - \alpha_3)(X_0 - \alpha_4)$

mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Für das Geschlecht g einer singularitätenfreien algebraischen Kurve $C \subset \mathbb{P}^2$, die durch ein irreduzibles Polynom vom Grad n definiert wird, gilt : [s. Kendig, K. [1]; Theorem 10.1., S. 98] :

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) .$$

Also besitzt V das Geschlecht $g = 3$.

Trifft auf V der Fall (1) zu, so gilt nach Notiz 2.5., daß V nicht hyperelliptisch ist.

Auf V treffe nun der Fall (2) zu.
$x: V \to \mathbb{P}^1$ ist eine 4-blättrige Überlagerung, und über jedem α_j $(j \in \mathbb{N}_4)$ liegt bzgl. x genau ein Punkt A_j auf der Riemannschen Fläche V. Diese vier Punkte $A_1, \ldots, A_4$ besitzen jeweils die Verzweigungsordnung 3. Für die Gesamtverzweigungs-

ordnung b von x gilt nach der Formel von Riemann-Hurwitz:

$$3 = g = \frac{b}{2} - 4 + 1, \quad \text{d.h. } b = 12.$$

Also verzweigt x nicht über ∞. Bildet man mittels eines $\mathbb{P}^1$-Automorphismus einen der Punkte α_j auf ∞ ab, so ist dann V biholomorph äquivalent zu einer Riemannschen Fläche $V_1 : y^4 = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)(x-\gamma_3)$ mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Insbesondere ist dann also V nicht hyperelliptisch.

V und W sind also nicht-hyperelliptische kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht $g = 3$. Für diese Klasse Riemannscher Flächen ist aber die Aussage von Satz 3.1. bereits durch Satz 1.11. bewiesen worden.

BEMERKUNG: Der Beweis im Fall $n = 4$ wird trivial, wenn man folgendes Resultat (und Satz 1.11.) zu Hilfe zieht.

SATZ: [s. Hartshorne R. [1]; Example 5.5.6, S. 347]
Die nicht-singulären ebenen Kurven $C \subset \mathbb{P}^2$ vom Grad 4 sind genau die nicht-hyperelliptischen Kurven vom Geschlecht $g = 3$. $\square$

Fall 2: $n > 4$.

Dann sind V und W nicht-singuläre ebene Kurven vom Grad $n > 4$. Für solche Kurven gilt nun:

SATZ 3.2.: [s. Namba M. [2]; Theorem 5.1.5.(2), S.228] Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine singularitätenfreie Kurve vom Grad $n > 4$. Dann gilt:

$$\operatorname{card}(\mathbb{G}_n^2(C)) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{F}_n^2(C) = \emptyset. \quad \square$$

Satz 3.2. liefert: $\operatorname{card}(\mathbb{G}_n^2(V)) = \operatorname{card}(\mathbb{G}_n^2(W)) = 1$.

Sei nun $f: V \to W$ biholomorph. Da f die Ordnung 1 besitzt und $\operatorname{grad} W = n$ gilt, folgt: $f \in \operatorname{Hol}_{NE}(V, \mathbb{P}^2)_n$. Nach Satz 1.7. gilt: $\operatorname{Hol}_{NE}(V, \mathbb{P}^2)_n / \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^2) \approx \mathbb{G}_n^2(V) - \mathbb{F}_n^2(V)$. Wegen $\operatorname{card}(\mathbb{G}_n^2(V)) = 1$ und $\mathbb{F}_n^2(V) = \emptyset$ besteht also der Orbitraum $\operatorname{Hol}_{NE}(V, \mathbb{P}^2)_n / \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^2)$ aus genau einem Element. Nun kann man wörtlich im Beweis zu Satz 1.11. fortfahren und erhält, daß f die Restriktion einer eindeutig bestimmten projektiven Transformation $B \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^2)$ ist. $\square$

Für den Beweis von Theorem 3.1. werden noch die beiden folgenden Lemmata benötigt.

LEMMA 3.1.: Sei $V \subset \mathbb{P}^{r+1}$ eine nicht-singuläre

Hyperfläche vom Grad n und gleichungsdefiniert durch

$$V : X_{r+1}^n = F(X_0, \ldots, X_r)$$

mit einem homogenen Polynom F vom Grad n.

Sei weiter $\tau : \mathbb{P}^{r+1} \ni (X_0 : \cdots : X_{r+1}) \to (X_0' : \cdots : X_{r+1}') \in \mathbb{P}_1^{r+1}$ ein projektiv-linearer Isomorphismus mit $\tau(P_\infty) = (0 : \cdots : 0 : s : 1)$ für ein $s \in \mathbb{C}$ und $\tau(H) = H'$. Dann ist $\tau(V)$ gleichungsdefiniert durch

$$\tau(V) : X_{r+1}'^{\,n} = F'(X_0', \ldots, X_{r-1}', X_r' - sX_{r+1}')$$

mit einem homogenen Polynom F' vom Grad n.

<u>BEWEIS :</u>

Es gelte $\tau = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0,r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,0} & \cdots & a_{r+1,r+1} \end{pmatrix} =: A$.

Wegen $\tau(P_\infty) = (0 : \cdots : 0 : s : 1)$ folgt: $(a_{0,r+1} : \cdots : a_{r+1,r+1})$ $= (0 : \cdots : 0 : s : 1)$ und somit

$a_{0,r+1} = \cdots = a_{r-1,r+1} = 0$ und O.B.d.A.

$a_{r,r+1} = s$, $a_{r+1,r+1} = 1$. Weiter gilt:

$\tau(0 : \cdots : 0 : \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle} \\ (0 \le j \le r)}}{1} : 0 : \cdots : 0) \in H'$.

Also gilt $(a_{0j} : a_{1j} : \dots : a_{r+1,j}) \in H'$ für $0 \leq j \leq r$, d.h.: $a_{r+1,0} = \dots = a_{r+1,r} = 0$. Mithin hat A die folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0r} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{r0} & \cdots & a_{rr} & s \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in PGL(r+2, \mathbb{C}).$$

Insbesonders gilt dann:

$$B := \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \in PGL(r+1, \mathbb{C}).$$

Es ist nun $(X'_0 : \dots : X'_{r+1}) \in \tau(V)$ gleichbedeutend mit

$(X'_0 : \dots : X'_{r+1}) =$

$(a_{00} X_0 + \dots + a_{0r} X_r : \dots : a_{r-1,0} X_0 + \dots + a_{r-1,r} X_r :$

$: a_{r0} X_0 + \dots + a_{rr} X_r + s X_{r+1} : X_{r+1})$

für ein $(X_0 : \dots : X_{r+1}) \in V$. Man erhält:

$X'_r - s X'_{r+1} = a_{r0} X_0 + \dots + a_{rr} X_r$. Also gilt:

$(X_0 : \dots : X_r) = B^{-1} (X'_0 : \dots : X'_{r-1} : X'_r - s X'_{r+1})$.

Damit erhält man schließlich:

$$X'^{n}_{r+1} = X^{n}_{r+1} = F \circ B^{-1}(X'_0 : \cdots : X'_{r-1} : X'_r - sX'_{r+1}).$$

$F' := F \circ B^{-1}$ ist aber wegen der Linearität von B^{-1} wiederum ein homogenes Polynom vom Grad n. Damit ist Lemma 3.1. bewiesen. $\square$

<u>LEMMA 3.2.:</u> Sei $V \subset \mathbb{P}^{r+1}$ eine nicht-singuläre Hyperfläche vom Grad n und gleichungsdefiniert durch

$$V : X^{n}_{r+1} = F(X_0, \dots, X_r)$$

mit einem homogenen Polynom F vom Grad n.

Weiter sei $\tau : \mathbb{P}^{r+1} \ni (X_0 : \cdots : X_{r+1}) \to (X'_0 : \cdots : X'_{r+1}) \in \mathbb{P}_1^{r+1}$ ein projektiv-linearer Isomorphismus mit $\tau(P_\infty) = (s : 0 : \cdots : 0 : 1 : t)$ für gewisse $s, t \in \mathbb{C}$ und $\tau(H) = \{X'_r = 0\}$. Dann ist $\tau(V)$ gleichungsdefiniert durch

$$\tau(V) : X'^{n}_{r} = F'(sX'_r - X'_0, X'_1, \dots, X'_{r-1}, tX'_r - sX'_{r+1})$$

mit einem homogenen Polynom F' vom Grad n.

<u>BEWEIS:</u>

Es gelte $\tau = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0,r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,0} & \cdots & a_{r+1,r+1} \end{pmatrix} =: A$

Wegen $\tau(P_\infty) = (s:0:\cdots:0:1:t)$ folgt:

$(a_{0,r+1}:\cdots:a_{r+1,r+1}) = (s:0:\cdots:0:1:t)$, d.h.

$a_{1,r+1} = \cdots = a_{r-1,r+1} = 0$ und O.B.d.A.

$a_{0,r+1} = s$, $a_{r,r+1} = 1$, $a_{r+1,r+1} = t$.

Die Voraussetzung $\tau(H) = \{X'_r = 0\}$ liefert nun:

$(a_{0j}:a_{1j}:\cdots:a_{r+1,j}) \in \{X'_r = 0\}$ für $0 \le j \le r$,

d.h.: $a_{r0} = \cdots = a_{rr} = 0$. A hat also die Gesta

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0r} & s \\ a_{10} & \cdots & a_{1r} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r-1,0} & \cdots & a_{r-1,r} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_{r+1,0} & \cdots & a_{r+1,r} & t \end{pmatrix} \in PGL(r+2, \mathbb{C}).$$

Insbesonders gilt dann:

$$B := \begin{pmatrix} -a_{00} & \cdots & -a_{0r} \\ a_{10} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,0} & \cdots & a_{r-1,r} \\ -a_{r+1,0} & \cdots & -a_{r+1,r} \end{pmatrix} \in PGL(r+1, \mathbb{C}).$$

Es ist $(X'_0:\cdots:X'_{r+1}) \in \tau(V)$ gleichbedeutend mit

$(X'_0 : \dots : X'_{r+1}) =$

$(a_{00}X_0 + \dots + a_{0r}X_r + sX_{r+1} : a_{10}X_0 + \dots + a_{1r}X_r : \dots :$

$: a_{r-1,0}X_0 + \dots + a_{r-1,r}X_r : X_{r+1} : a_{r+1,0}X_0 + \dots + a_{r+1,r}X_r + tX_{r+1})$

für ein $(X_0 : \dots : X_{r+1}) \in V$.

Es gilt dann:

$$sX'_r - X'_0 = -a_{00}X_0 - \dots - a_{0r}X_r \; ;$$

$$tX'_r - X'_{r+1} = -a_{r+1,0}X_0 - \dots - a_{r+1,r}X_r \; .$$

Also gilt: $(X_0 : \dots : X_r) =$

$B^{-1}(sX'_r - X'_0, X'_1, \dots, X'_{r-1}, tX'_r - X'_{r+1})$.

Daraus folgt:

$$X_r'^n = X^n_{r+1} = F \circ B^{-1}(sX'_r - X'_0, X'_1, \dots, X'_{r-1}, tX'_r - X'_{r+1})$$

Da B^{-1} linear ist, ist $F' := F \circ B^{-1}$ ein homogenes Polynom vom Grad n. Damit ist Lemma 3.2. bewiesen. $\square$

<u>BEWEIS</u> (von Theorem 3.1.):

„$\Leftarrow$":

Sei $B = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r0} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \in Aut(\mathbb{P}^r)$ mit

$B(\{F=0\}) = \{G=0\}$.

Sei $B' := \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots\cdots & a_{0r} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r0} & \cdots\cdots & a_{rr} & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $B' \in Aut(\mathbb{P}^{r+1})$.

Sei $f := B'_{|V}$. f ist trivialerweise injektiv.

Sei nun $(X'_0 : \cdots : X'_{r+1}) \in W$. Dann gilt:
$X'^{m}_{r+1} = G(X'_0, \ldots, X'_r)$.

Fall 1: $G(X'_0, \ldots, X'_r) = 0 = X'_{r+1}$.
Es gibt dann ein $(X_0 : \cdots : X_r) \in \{F=0\}$ mit $B(X_0 : \cdots : X_r) = (X'_0 : \cdots : X'_r)$. Es gilt $(X_0 : \cdots : X_r : 0) \in V$ und man erhält:
$f(X_0 : \cdots : X_r : 0) = (X'_0 : \cdots : X'_r : X'_{r+1})$.

Fall 2: $G(X'_0, \ldots, X'_r) \neq 0$.
Wegen $X'_{r+1} \neq 0$ gilt dann:

$$(X'_0 : \cdots : X'_{r+1}) = \left(\frac{X'_0}{X'_{r+1}} : \cdots : \frac{X'_r}{X'_{r+1}} : 1 \right).$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $(X_0 : \cdots : X_r) \in \{F \neq 0\}$ mit

$$B(X_0 : \cdots : X_r) = (X'_0 : \cdots : X'_r) = \left(\frac{X'_0}{X'_{r+1}} : \cdots : \frac{X'_r}{X'_{r+1}} : 1 \right).$$

Weiter gilt: $\sqrt[n]{F(X_0,\dots,X_r)} \neq 0$ und

$$(X_0:\dots:X_r:\sqrt[n]{F(X_0,\dots,X_r)}) =$$

$$\left(\frac{X_0}{\sqrt[n]{F(X_0,\dots,X_r)}}:\dots:\frac{X_r}{\sqrt[n]{F(X_0,\dots,X_r)}}:1\right) =: Q \in V.$$

Es folgt: $f(Q) = \left(\frac{X'_0}{X'_{r+1}}:\dots:\frac{X'_r}{X'_{r+1}}:1\right) = (X'_0:\dots:X'_r:X'_{r+1})$

Es gilt also $f(V) = W$. Also ist $f: V \to W$ bijektiv
Aus Satz 1.9. folgt nun, daß f biholomorph ist.
Damit ist „$\Leftarrow$" bewiesen.

„$\Rightarrow$": V und W seien biholomorph äquivalent.

Es gelte zunächst: <u>$n = 1$ und $r \in \mathbb{N}$ beliebig</u>.

Dann ist die Aussage von Theorem 3.1. trivial, da in diesem Fall $\{F = 0\}$ und $\{G = 0\}$ Hyperebenen in $\mathbb{P}^r$ sind. Je zwei Hyperebenen $H_1, H_2 \subset \mathbb{P}^r$ sind aber stets projektiv äquivalent.

Es gelte nun: <u>$n = 2$ und $r \in \mathbb{N}$ beliebig.</u>

Dann sind $\{F = 0\}$ und $\{G = 0\}$ singularitätenfreie Quadriken in $\mathbb{P}^r$. Nach dem Satz über die komplex-projektive Hauptachsentransformation gibt es zu jeder Quadrik $Q \subset \mathbb{P}^r$ [1] eine projektiv äquivalente Quadrik Q_m^r mit

$$Q_m^r = \{(X_0 : \cdots : X_r) \in \mathbb{P}^r \mid X_0^2 + \cdots + X_m^2 = 0\}$$

für ein m mit $0 \leq m \leq r$.

Ersichtlich ist Q_m^r nur im Fall $r = m$ Singularitätenfrei. Da $\{F=0\}$ und $\{G=0\}$ ebenfalls nichtsingulär sind und die Singularitätenfreiheit von Quadriken eine Invariante unter projektiv-linearen Isomorphismen ist, folgt, daß $\{F=0\}$ und $\{G=0\}$ projektiv äquivalent zu Q_r^r sind. Mithin sind sie selber projektiv äquivalent.

Als letzter Spezialfall wird der Fall : <u>$n=3$ und $r=1$</u> betrachtet.

Die Hyperflächen V, W sind dann singularitätenfreie kubische Kurven und somit Tori.

Dehomogenisieren des V definierenden homogenen Polynoms $H(X_0, X_1, X_2) = X_2^3 - F(X_0, X_1)$ nach X_1 liefert das Polynom $K(X_0, X_2) = X_2^3 - F(X_0, 1)$. Aus der Singularitätenfreiheit von V folgt unmittelbar, daß für $K(X_0, X_2)$ nur die beiden folgenden Fälle eintreten können:

---

zu 1): Manche Autoren zählen $\mathbb{P}^r$ mit zu den Quadriken in $\mathbb{P}^r$. Dies wird hier ausgeschlossen.

(1) $K(X_0, X_2) = X_2^3 - (X_0 - \alpha_1)(X_0 - \alpha_2)(X_0 - \alpha_3)$

mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

(2) $K(X_0, X_2) = X_2^3 - (X_0 - \alpha_1)(X_0 - \alpha_2)$

mit paarweise verschiedenen komplexen Zahlen α_1, α_2.

Im Fall (1) gilt $F(1,0) \neq 0$ und im Fall (2) gilt $F(1,0) = 0$. Mithin gilt in beiden Fällen: $\operatorname{card}\{F = 0\} = 3$. Analoge Betrachtungen für den Torus W liefern: $\operatorname{card}\{G = 0\} = 3$. Hieraus folgt die Behauptung von Theorem 3.1. auch im Fall $(n, r) = (3, 1)$, da es für Teilmengen $M, N \subset \mathbb{P}^1$ mit $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N = 3$ stets genau einen $\mathbb{P}^1$-Automorphismus B gibt mit $B(M) = N$.

Simultan behandelt werden die verbleibenden Fälle:

(i) $n \geq 4$, falls $r = 1$ oder
(ii) $n \geq 3$, falls $r \geq 2$ und $(n, r) \neq (4, 2)$.

$f : V \to W$ sei biholomorph.

Nach Satz 3.1. gibt es dann genau eine projektive Transformation $E = (a_{ij}) \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^{r+1})$ mit $E_{|V} = f$.

Der projektiv-lineare Isomorphismus $E_{|V}$ wird ebenfalls mit E bezeichnet.

W wird als Hyperfläche in $\mathbb{P}_1^{\tau+1}$ betrachtet.

Es gilt dann also:

$(X_0' : \dots : X_{\tau+1}') \in W \iff$

$$\exists (X_0 : \dots : X_{\tau+1}) \in V : X_j' = \sum_{k=0}^{\tau+1} a_{jk} X_k \quad \text{für } j \in \{0, \dots, \tau+1\}$$

Man erhält

NOTIZ 3.2.: Es gibt ein $c \in \mathbb{C}^*$ mit

$$\left(\sum_{k=0}^{\tau+1} a_{\tau+1,k} X_k\right)^m - G\left(\sum_{k=0}^{\tau+1} a_{0k} X_k, \dots, \sum_{k=0}^{\tau+1} a_{\tau k} X_k\right) =$$

$$c X_{\tau+1}^m - c F(X_0, \dots, X_\tau) \quad \text{für alle } (X_0 : \dots : X_{\tau+1}) \in \mathbb{P}^{\tau+1}.$$

BEWEIS:

Sei $F_1 := X_{\tau+1}^m - F(X_0, \dots, X_\tau)$ und

$$G_1 := \left(\sum_{k=0}^{\tau+1} a_{\tau+1,k} X_k\right)^m - G\left(\sum_{k=0}^{\tau+1} a_{0k} X_k, \dots, \sum_{k=0}^{\tau+1} a_{\tau k} X_k\right).$$

Die Polynome F_1 und G_1 besitzen ersichtlich die genaue Nullstellenmenge V. Also sind sie assoziiert [s. auch Walker R.J. [1]; Theorem 9.7., S.26] Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Es werden nun zwei Fälle unterschieden.

<u>Fall 1:</u> $E(H) = H'$.

Dann gilt also: $X'_{r+1} = 0 \iff X_{r+1} = 0$.

Mit Notiz 3.2. folgt hieraus die Existenz eines $c \in \mathbb{C}^*$ mit

$$G\left(\sum_{k=0}^{r} a_{0k} X_k, \dots, \sum_{k=0}^{r} a_{rk} X_k\right) = cF(X_0, \dots, X_r)$$

für alle $(X_0 : \dots : X_r : 0) \in H$. Somit ist

$B : \mathbb{P}^r \ni (X_0 : \dots : X_r) \mapsto (Y_0 : \dots : Y_r) \in \mathbb{P}^r$

mit $Y_j = \sum_{k=0}^{r} a_{jk} X_k$ ein $\mathbb{P}^r$- Automorphismus

mit $B(\{F = 0\}) = \{G = 0\}$.

Unter Vernachlässigung einer korrekten Schreibweise kann man B kurzer Hand mit $E_{|H} : H \to H'$ identifizieren.

<u>Fall 2:</u> $E(H) \neq H'$.

In Abhängigkeit von der geometrischen Lage von $E(P_\infty)$, P'_∞, $E(H)$ und H' zueinander, wird dieser Fall noch einmal in zwei Unterfälle unterteilt.

<u>Fall 2-a):</u> Es gebe eine Gerade g durch die Punkte P'_∞ und $E(P_\infty)$ mit $g \cap H' \cap E(H) = \emptyset$.

Man erhält dann :

<u>NOTIZ 3.3.:</u> $\operatorname{card}(g \cap H') = \operatorname{card}(g \cap E(H)) = 1$.

<u>BEWEIS:</u> Wegen $P'_\infty \in g$ und $P'_\infty \notin H'$ folgt: $g \not\subset H'$. Wegen $E(P_\infty) \in g$ und $E(P_\infty) \notin E(H)$ folgt: $g \not\subset E(H)$. E ist Automorphismus, und somit ist $E(H)$ eine Hyperebene. Nun besteht aber der Durchschnitt einer Geraden $\tilde{g} \subset \mathbb{P}^{r+1}$ und einer Hyperebene $\tilde{H} \subset \mathbb{P}^{r+1}$ aus genau einem Punkt. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Notiz 3.3. liefert also :

$$g \cap H' = \{R\} \quad \text{und} \quad g \cap E(H) = \{S\}$$

für gewisse $R, S \in \mathbb{P}^{r+1}$. Es gilt weiter :

<u>NOTIZ 3.4.:</u> Es gibt einen projektiv-linearen Isomorphismus

$$T : \mathbb{P}_1^{r+1} \ni (X'_0 : \cdots : X'_{r+1}) \to (X''_0 : \cdots : X''_{r+1}) \in \mathbb{P}_2^{r+1}$$

und komplexe Zahlen s, t, so daß gilt :

$$\begin{aligned}
T(P'_\infty) &= (0 : \cdots : 0 : s : 1), \\
T(E(P_\infty)) &= (0 : \cdots : 0 : 1 : t), \\
T(R) &= (0 : \cdots : 0 : 1 : 0), \\
T(S) &= (0 : \cdots : 0 : 0 : 1), \\
T(H') &= H'' \quad \text{und} \\
T(E(H)) &= \{X''_r = 0\}.
\end{aligned}$$

<u>BEWEIS:</u> Es gilt $R \in H'$ und $S \in E(H)$. Wegen $g \cap H' \cap E(H) = \emptyset$ folgt weiter:

$R \neq P'_\infty$, $S \neq E(P_\infty)$ und $R \neq S$.

H', $E(H)$, H'' und $\{X''_\tau = 0\}$ werden nun als Hyperebenen in $\mathbb{C}^{\tau+2}$ aufgefaßt.

P_1, E_1, R_1 und S_1 seien Vektorrepräsentanten von P'_∞, $E(P_\infty)$, R und S.

Wegen $R \neq S$ sind R_1 und S_1 linear unabhängig.

Da g durch R, S, P'_∞ und $E(P_\infty)$ verläuft, folgt

$P_1 \in \mathrm{Span}(R_1, S_1)$ und $E_1 \in \mathrm{Span}(R_1, S_1)$.

Sei $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Basis von $H' \cap E(H)$. Wegen $R_1 \notin E(H)$, $S_1 \notin H'$ und der linearen Unabhängigkeit von R_1 und S_1 folgt:

$\{v_1, \ldots, v_r, R_1, S_1\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}^{\tau+2}$.

Wegen $(0, \ldots, 0, 1, 0) \notin \{X''_\tau = 0\} \cap H''$ und $(0, \ldots, 0, 0, 1) \notin \{X''_\tau = 0\} \cap H''$, gibt es einen linearen Automorphismus $\varphi: \mathbb{C}^{\tau+2} \to \mathbb{C}^{\tau+2}$ mit

$$\varphi(H' \cap E(H)) = \{X''_\tau = 0\} \cap H'',$$
$$\varphi(R_1) = (0, \ldots, 0, 1, 0) \text{ und}$$
$$\varphi(S_1) = (0, \ldots, 0, 0, 1).$$

Wegen $R_1 \in H'$; $(0,\dots,0,1,0) \in H''$, $S_1 \in E(H)$ und $(0,\dots,0,0,1) \in \{X''_\tau = 0\}$ folgt:

$\varphi(H') = H''$ und $\varphi(E(H)) = \{X''_\tau = 0\}$.

Seien w_1, w_2 komplexe Zahlen mit $w_1 R_1 + w_2 S_1 = P_1$. Es folgt $w_2 \neq 0$, da ansonsten $R = P_\infty$ gelten würde. Analog folgt aus $u_1 R_1 + u_2 S_1 = E_1$: $u_1 \neq 0$.

Es gilt also:
$\varphi(P_1) = (0,\dots,0,w_1,w_2)$ mit $w_2 \neq 0$ und
$\varphi(E_1) = (0,\dots,0,u_1,u_2)$ mit $u_1 \neq 0$.

φ induziert dann einen projektiv-linearen Isomorphismus T der gesuchten Art. $\square$

Sei nun T ein projektiv-linearer Isomorphismus mit den in Notiz 3.4. angeführten Eigenschaften.

Wegen $T(H') = H''$ und $T(P'_\infty) = (0:\dots:0:s:1)$, genügt T den Bedingungen von Lemma 3.1. Also ist $T(W)$ gleichungsdefiniert durch

(1) $\quad T(W) : X''^{n}_{\tau+1} = F''(X''_0,\dots,X''_{\tau-1}, X''_\tau - sX''_{\tau+1})$

mit einem homogenen Polynom F'' vom Grad n.

Wegen $T\circ E(H) = \{X''_\tau = 0\}$ und $T\circ E(P_\infty) = (0:\dots:0:1:t)$ genügt $T\circ E$ den Bedingungen von Lemma 3.2. (Man setze dort $s=0$). $T\circ E(V)$ ist also gleichungsdefiniert durch

$$T\circ E(V) : X_\tau''^{n} = \tilde{G}''(-X_0'', X_1'', \ldots, X_{\tau-1}'', tX_\tau'' - X_{\tau+1}'')$$

mit einem homogenen Polynom $\tilde{G}''$ vom Grad n.
Es folgt die Existenz eines homogenen Polynoms G'' vom Grad n, so daß $T\circ E(V) = T(W)$ gleichungsdefiniert ist durch

$$(2)\quad T(W) = T\circ E(V) : X_\tau''^{n} = G''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_{\tau+1}'' - tX_\tau'')$$

Es gilt nun weiter:

<u>NOTIZ 3.5.</u>: Es gibt ein $c \in \mathbb{C}^*$, so daß gilt:
$F''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_\tau'' - sX_{\tau+1}'') - X_{\tau+1}''^{n} =$
$c \cdot G''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_{\tau+1}'' - tX_\tau'') - cX_\tau''^{n}$
für alle $(X_0'' : \cdots : X_{\tau+1}'') \in \mathbb{P}^{\tau+1}$.

<u>BEWEIS</u>: Für die Polynome
$F_1 = F''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_\tau'' - sX_{\tau+1}'') - X_{\tau+1}''^{n}$ und
$G_1 = G''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_{\tau+1}'' - tX_\tau'') - X_\tau''^{n}$ gilt, daß sie die genaue Nullstellenmenge W besitzen. Also sind sie assoziiert, woraus die Behauptung folgt. □

Man setze nun in Notiz 3.5.

$X_0'' = \cdots = X_{\tau-1}'' = 0,$
$X_\tau'' = X$ und
$X_{\tau+1}'' = Y.$

Weil F'' und G'' homogene Polynome vom Grad n sind, folgt:

$$a(X-sY)^n - Y^n = cb(Y-tX)^n - cX^n$$

für gewisse komplexe Zahlen a, b. Es ist $n \geq 3$. Durch Termvergleich erhält man:

(3 – 1) $\quad a = cb(-t)^n - c$
für die Koeffizienten von X^n,

(3 – 2) $\quad a(-s)^n - 1 = cb$
für die Koeffizienten von Y^n,

(3 – 3) $\quad a(-s) = cb(-t)^{n-1}$
für die Koeffizienten von $X^{n-1}Y$ und

(3 – 4) $\quad as^2 = cb(-t)^{n-2}$
für die Koeffizienten von $X^{n-2}Y^2$.

<u>NOTIZ 3.6.:</u> Es gilt $s = 0$.

<u>BEWEIS:</u> <u>Annahme:</u> $s \neq 0$.

Dann gilt $b \neq 0$.

<u>Beweis:</u> <u>Annahme:</u> $b = 0$.
Wegen $s \neq 0$ liefert dann (3 – 3): $a = 0$. Wegen $b = 0$ geht (3 – 1) über in $a = -c$, woraus wegen $a = 0$ folgt: $c = 0$. Widerspruch zu $c \in \mathbb{C}^*$. Also

liefert die Annahme $s \neq 0$ in der Tat: $b \neq 0$.

Es folgt $a \neq 0$.

<u>Beweis:</u> <u>Annahme:</u> $a = 0$.
Wegen $c \neq 0$ liefert dann (3 − 3): $b = 0$. Widerspruch zu $b \neq 0$. Also gilt $a \neq 0$.

Es gilt also: $abcs \neq 0$. Dies liefert wegen (3 − 4): $t \neq 0$. (3 − 3) und (3 − 4) liefern nun:

$$(*) \quad \frac{t^{n-1}}{s} = \frac{a}{cb(-1)^n} = \frac{t^{n-2}}{s^2} .$$

Wegen $t \neq 0$ folgt $s = \frac{1}{t} \Longleftrightarrow st = 1$.

Multipliziert man in $(*)$ $\frac{a}{cb(-1)^n}$ mit $\frac{1}{t^n}$, so erhält man: $\frac{a}{cb(-1)^n t^n} = \frac{1}{st} = 1$. Somit gilt: $a = cb(-1)^n t^n$.
Dies in (3 − 1) eingesetzt, liefert aber $a = a - c$, d.h. $c = 0$. Widerspruch. Also war die Annahme $s \neq 0$ falsch und Notiz 3.6. ist bewiesen. □

$s = 0$ in (3 − 2) eingesetzt, liefert $-1 = cb$.
Wegen $c \neq 0$ gilt also $b \neq 0$. Wegen $cb \neq 0$ und $s = 0$ liefert dann (3 − 3): $t = 0$.

Für den projektiv-linearen Isomorphismus T gilt also:
$T(P'_\infty) = (0 : \cdots : 0 : 0 : 1) = T(S)$ und
$T(E(P_\infty)) = (0 : \cdots : 0 : 1 : 0) = T(R)$. Mithin gilt:

$P'_\infty = S$ und $E(P_\infty) = R$.

Unter Beachtung von $s = t = 0$ geht die Gleichung aus Notiz 3.5. über in:

$$F''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_\tau) - X''^{n}_{\tau+1} =$$

$$c \cdot G''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_{\tau+1}) - cX''^{n}_\tau \iff$$

$$F''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_\tau) =$$

$$c \cdot G''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_{\tau+1}) - cX''_\tau + X''^{n}_{\tau+1}.$$

Da $F''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_\tau)$ nicht von $X''_{\tau+1}$ abhängt, enthält $G''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_{\tau+1})$ den Term $-\frac{1}{c}X''^{n}_{\tau+1}$ und sonst keinen weiteren Term, in dem $X''_{\tau+1}$ vorkommt. $G''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_{\tau+1})$ seinerseits hängt nicht von X''_τ ab, so daß also $F''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_\tau)$ den Term $-cX''^{n}_\tau$ enthält und sonst keinen weiteren Term, in dem X''_τ vorkommt. Also liefert die obige Gleichung die Existenz eines homogenen Polynoms $K(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1})$ vom Grad n, so daß gilt:

$$(4-1) \quad F''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_\tau) = K''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}) - cX''^{n}_\tau \quad \text{und}$$

$$(4-2) \quad G''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_{\tau+1}) = \frac{1}{c}K''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}) - \frac{1}{c}X''^{n}_{\tau+1}.$$

Sei $c_1 = \sqrt[m]{\frac{1}{c}}$. Die Polynome $\tilde{F}'', \tilde{G}'' \in \mathbb{C}[X_0'', \ldots, X_{\tau+1}'']$ seien definiert durch

$$\tilde{F}''(X_0'', \ldots, X_\tau'', X_{\tau+1}'') = F''(X_0'', \ldots, X_\tau'') \text{ und}$$
$$\tilde{G}''(X_0'', \ldots, X_\tau'', X_{\tau+1}'') = G''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_{\tau+1}'').$$

Man erhält dann:

<u>NOTIZ 3.7.:</u> Für den Automorphismus

$$T_1 : \mathbb{P}_2^{\tau+1} \ni (X_0'' : \cdots : X_{\tau-1}'' : X_\tau'' : X_{\tau+1}'') \longmapsto$$
$$(X_0'' : \cdots : X_{\tau-1}'' : c_1 X_{\tau+1}'' : X_\tau'') \in \mathbb{P}_2^{\tau+1} \text{ gilt:}$$

(i) $T_1(\{\tilde{G}'' = 0\}) = \{\tilde{F}'' = 0\}$,

(ii) $T_1(\{X_\tau'' = 0\}) = \{X_{\tau+1}'' = 0\}$.

<u>BEWEIS:</u> Es gilt:

$$\tilde{F}''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_\tau'', X_{\tau+1}'') = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$F''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_\tau'') = 0 \quad \Longleftrightarrow [4-1]$$

$$K''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'') - c X_\tau''^m = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{c} K''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'') - X_\tau''^m = 0 \quad \Longleftrightarrow [4-2]$$

$$G''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', c_1 X_\tau'') = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\tilde{G}''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', c_1 X_\tau'', X_{\tau+1}'') = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\tilde{G}''(T_1^{-1}(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_\tau'', X_{\tau+1}'')) = 0.$$

Daraus folgt (i). (ii) ist trivial. □

Sei $\tilde{G} \in \mathbb{C}[X''_0, \dots, X''_{\tau+1}]$ definiert durch

$\tilde{G}(X''_0, \dots, X''_\tau, X''_{\tau+1}) := G(X''_0, \dots, X''_\tau)$. Dann gilt:

NOTIZ 3.8.: $T(\{\tilde{G} = 0\}) = \{\tilde{F}'' = 0\}$.

BEWEIS: Es gilt: $\tilde{G}(X''_0, \dots, X''_\tau, X''_{\tau+1}) = 0 \iff (X''_0 : \dots : X''_\tau : X''_{\tau+1}) \in W$. Wegen $s = 0$ folgt dann die Behauptung aus (1). □

Sei schließlich $\tilde{F} \in \mathbb{C}[X''_0, \dots, X''_{\tau+1}]$ definiert durch

$\tilde{F}(X''_0, \dots, X''_\tau, X''_{\tau+1}) := F(X''_0, \dots, X''_\tau)$. Dann gilt:

NOTIZ 3.9.: $(T \circ E)(\{\tilde{F} = 0\}) = \{\tilde{G}'' = 0\}$.

BEWEIS: Es gilt $\tilde{F}(X''_0, \dots, X''_\tau, X''_{\tau+1}) = 0 \iff (X''_0 : \dots : X''_\tau : X''_{\tau+1}) \in V$. Wegen
$\tilde{G}''(X''_0, \dots, X''_{\tau-1}, X''_\tau, X''_{\tau+1}) = G''(X''_0, \dots, X''_{\tau-1}, X''_{\tau+1})$
und $t = 0$, folgt dann die Behauptung aus (2). □

NOTIZ 3.10.: Für den projektiv-linearen Isomorphismus

$T_2 := T^{-1} \circ T_1 \circ T \circ E : \mathbb{P}^{\tau+1} \to \mathbb{P}_1^{\tau+1}$ gilt:

(i) $T_2(H) = H'$,

(ii) $T_2(\{\tilde{F} = 0\}) = \{\tilde{G} = 0\}$.

BEWEIS: $T_2(H) = T^{-1} \circ T_1 \circ T(E(H)) \overset{[\text{Notiz } 3.4.]}{=}$

$T^{-1} \circ T_1(\{X''_\tau = 0\}) \overset{[\text{Notiz } 3.7.(ii)]}{=} T^{-1}(\{X''_{\tau+1} = 0\})$

$\overset{[\text{Notiz } 3.4.]}{=} H'$. Damit ist (i) gezeigt. Weiter gilt:

$T_2(\{\tilde{F}=0\}) = T^{-1} \circ T_1 \circ (T \circ E)(\{\tilde{F}=0\}) \overset{[\text{Notiz } 3.9.]}{=}$

$T^{-1} \circ T_1 (\{\tilde{G}''=0\}) \overset{[\text{Notiz } 3.7.(i)]}{=} T^{-1}(\{\tilde{F}''=0\})$

$\overset{[\text{Notiz } 3.8.]}{=} \{\tilde{G}=0\}$. Damit ist auch (ii) gezeigt. □

Definiert man nun $B : \mathbb{P}^r \to \mathbb{P}^r$ durch $B(X_0 : \cdots : X_r) = T_2(X_0 : \cdots : X_r : 0)$, so gilt nach Notiz 3.10.:

$B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r)$ und $B(\{F=0\}) = \{G=0\}$.

Damit ist Theorem 3.1. für den Fall 2–a) bewiesen.

<u>Fall 2–b):</u> Es gebe keine Gerade g durch die Punkte P'_∞ und $E(P_\infty)$ mit $g \cap H' \cap E(H) = \emptyset$.

Dann gilt: $P'_\infty \neq E(P_\infty)$.

Wäre nämlich $P'_\infty = E(P_\infty)$, so wähle man ein $Q \in \mathbb{P}_1^{r+1}$ mit $Q \in H' - E(H)$ und betrachte die Gerade g_Q durch $E(P_\infty) = P'_\infty$ und Q. Wegen $g_Q \not\subset H'$ gilt dann $\{Q\} = g_Q \cap H'$. Wegen $Q \notin E(H)$ folgt dann: $g_Q \cap H' \cap E(H) = \emptyset$. Widerspruch! Also gilt $P'_\infty \neq E(P_\infty)$.

Sei nun g die Gerade durch P'_∞ und $E(P_\infty)$.

Es gilt dann also: $g \cap H' \cap E(H) \neq \emptyset$.

Es wird gezeigt, daß dies zu einem Widerspruch führt und somit Fall 2-b) überhaupt nicht eintreten kann.

Wegen $P'_\infty \notin H'$ und $E(P_\infty) \notin E(H)$ gilt:
$g \notin H'$ und $g \notin E(H)$. Also gibt es ein $R \in \mathbb{P}^{r+1}$ mit $g \cap H' \cap E(H) = \{R\}$ und $R \neq P'_\infty$, $R \neq E(P_\infty)$. Weiter gilt:

<u>NOTIZ 3.11.:</u> $P'_\infty \notin H' \cup E(H)$, $E(P_\infty) \notin H' \cup E(H)$.

<u>BEWEIS:</u> <u>Annahme:</u> $P'_\infty \in E(H)$.
Wegen $g \notin E(H)$ gilt $\mathrm{card}\,(g \cap E(H)) = 1$. Also gilt $R = P'_\infty$. Widerspruch!
Analog folgt, daß nicht $E(P_\infty) \in H'$ gelten kann.
Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Unter Beachtung von Notiz 3.11. folgt durch eine Argumentation wie im Beweis zu Notiz 3.4.:

<u>NOTIZ 3.12.:</u> Es gibt einen projektiv-linearen Isomorphismus $T: \mathbb{P}_1^{r+1} \ni (X'_0 : \cdots : X'_{r+1}) \to (X''_0 : \ldots : X''_{r+1}) \in \mathbb{P}_2^{r+1}$ und eine komplexe Zahl $s \neq 0$, so daß gilt:

$$T(P'_\infty) = (0 : \cdots : 0 : s : 1),$$

$$T(E(P_\infty)) = (1 : \cdots : 0 : s : 1),$$

$$T(R) \quad = (1 : \cdots : 0 : 0 : 0),$$

$$T(H') = H'' \quad \text{und}$$

$$T(E(H)) = \{X''_\tau = 0\}. \quad \square$$

Sei T ein projektiv-linearer Isomorphismus wie in Notiz 3.12. Wegen $T(P'_\infty) = (0:\cdots:0:s:1)$ und $T(H') = H''$ erfüllt T die Bedingungen aus Lemma 3.1. Somit ist $T(W)$ gleichungsdefiniert durch

(5) $\quad T(W) : X''^{m}_{\tau+1} = F''(X''_0, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_\tau - sX''_{\tau+1})$

mit einem homogenen Polynom F'' vom Grad n.

Wegen $(T\circ E)(P_\infty) = (1:0:\cdots:0:s:1) = (\frac{1}{s}:0:\cdots:0:1:\frac{1}{s})$ und $(T\circ E)(H) = \{X''_\tau = 0\}$ erfüllt $T\circ E$ die Bedingungen aus Lemma 3.2. Also ist $T(W) = T\circ E(V)$ gleichungsdefiniert durch

$$T(W) : X''^{m}_{\tau} = H''(\tfrac{1}{s}X''_\tau - X''_0, X''_1, \ldots, X''_{\tau-1}, \tfrac{1}{s}X''_\tau - X''_{\tau+1})$$

mit einem homogenen Polynom H'' vom Grad n.

Also gibt es auch ein homogenes Polynom G'' vom Grad n, so daß $T(W)$ gleichungsdefiniert ist durch

(6) $\quad T(W) : X''^{m}_{\tau} = G''(X''_\tau - sX''_0, X''_1, \ldots, X''_{\tau-1}, X''_\tau - sX''_{\tau+1}).$

<u>NOTIZ 3.13.:</u> Es gibt ein $c \in \mathbb{C}^*$, so daß gilt:

$$F''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_\tau'' - sX_{\tau+1}'') - X_{\tau+1}''^{\,n} =$$

$$c \cdot G''(X_\tau'' - sX_0'', X_1'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_\tau'' - sX_{\tau+1}'') - cX_\tau''^{\,n}$$

für alle $(X_0'' : \ldots : X_{\tau+1}'') \in \mathbb{P}_2^{\tau+1}$.

<u>BEWEIS:</u> (5) und (6) liefern, daß die Polynome $F_1 = F''(X_0'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_\tau'' - sX_{\tau+1}'') - X_{\tau+1}''^{\,n}$ und $G_1 = G''(X_\tau'' - sX_0'', X_1'', \ldots, X_{\tau-1}'', X_\tau'' - sX_{\tau+1}'') - X_\tau''^{\,n}$ die genaue Nullstellenmenge W besitzen. Somit sind F_1 und G_1 assoziiert. Daraus folgt die Behauptung. □

Man setze nun in Notiz 3.13:

$$X_1'' = \ldots = X_{\tau-1}'' = 0,$$

$$X_0'' = X,$$

$$X_\tau'' - sX_0'' = Y \quad \text{und}$$

$$X_\tau'' - sX_{\tau+1}'' = Z.$$

Man erhält dann, da F'' und G'' homogene Polynome vom Grad n sind und $X_\tau'' = Y + sX$ und $X_{\tau+1}'' = \dfrac{Y + sX - Z}{s}$ gilt:

$$(7): \quad a_0X^n + a_1X^{n-1}Z + \cdots + a_nZ^n - \left(\frac{Y - Z + sX}{s}\right)^n =$$

$$cb_0Y^n + cb_1Y^{n-1}Z + \cdots + cb_nZ^n - c(sX + Y)^n$$

für gewisse komplexe Zahlen $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$.

Setzt man in (7) : $X=0$, so erhält man:

$$a_n Z^n - \frac{1}{s^n}(Y-Z)^n =$$

$$cb_0 Y^n + cb_1 Y^{n-1} Z + \dots + cb_n Z^n - cY^n \iff$$

$$cb_0 Y^n + cb_1 Y^{n-1} Z + \dots + cb_n Z^n =$$

$$a_n Z^n + cY^n - \frac{1}{s^n}(Y-Z)^n.$$

Dies eingesetzt in (7) liefert:

$$a_0 X^n + a_1 X^{n-1} Z + \dots + a_n Z^n - \frac{1}{s^n}(Y-Z+sX)^n =$$

$$a_n Z^n + cY^n - \frac{1}{s^n}(Y-Z)^n - c(sX+Y)^n \iff$$

$$(8) \quad a_0 X^n + a_1 X^{n-1} Z + \dots + a_{n-1} X Z^{n-1} =$$

$$cY^n + \frac{1}{s^n}(Y-Z+sX)^n - \frac{1}{s^n}(Y-Z)^n - c(sX+Y)^n.$$

Setzt man in (8): $Y=0$, so erhält man:

$$a_0 X^n + a_1 X^{n-1} Z + \dots + a_{n-1} X Z^{n-1} =$$

$$\frac{1}{s^n}(sX-Z)^n - \left(\frac{-1}{s}\right)^n Z^n - c(sX)^n.$$

Dies eingesetzt in (8) liefert:

$$(9)\quad \frac{1}{s^n}(sX-Z)^n-\left(-\frac{1}{s}\right)^n Z^n - cs^nX^n =$$

$$cY^n+\frac{1}{s^n}(Y-Z+sX)^n-\frac{1}{s^n}(Y-Z)^n-c(sX+Y)^n.$$

Setzt man in (9) : $Z=0$, so erhält man:

$$\frac{1}{s^n}(sX)^n - cs^nX^n =$$

$$cY^n+\frac{1}{s^n}(Y+sX)^n-\frac{1}{s^n}Y^n-c(sX+Y)^n \iff$$

$$(1-cs^n)X^n+\left(\frac{1}{s^n}-c\right)Y^n=\left(\frac{1}{s^n}-c\right)(sX+Y)^n.$$

Die linke Seite dieser Gleichung besitzt keinen Term, der $X^{n-1}Y$ enthält. Auf der rechten Seite der Gleichung ist der Koeffizient von $X^{n-1}Y$ gleich

$$\left(\frac{1}{s^n}-c\right)s^{n-1}=\frac{1}{s}-cs^{n-1}.$$

Da dieser Koeffizient gleich Null sein muß, erhält man: $c=\frac{1}{s^n}$. Geht man hiermit zurück in die Gleichung (9), so erhält man:

$$c(sX-Z)^n-(-c)^nZ^n-X^n =$$

$$cY^n+c(Y-Z+sX)^n-c(Y-Z)^n-c(sX+Y)^n \iff$$

$$(sX-Z)^n-(-1)^nZ^n-s^nX^n \quad = \quad Y^n+(Y-Z+sX)^n-(Y-Z)^n-(sX+Y)^n \Longleftrightarrow$$

$$(10) \qquad (Y-Z+sX)^n-(Y-Z)^n = (sX-Z)^n+(sX+Y)^n-(-1)^nZ^n-Y^n-s^nX^n.$$

Es ist nach Voraussetzung $n \geq 3$. Es gilt:

$$(Y-Z+sX)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}Y^k(-Z)^{j-k}\right)sX^{n-j}.$$

Hieraus folgt, daß der Koeffizient von $XY^{n-2}Z$ auf der linken Seite der Gleichung (10) gleich $-\binom{n}{2}\binom{2}{1} = -n(n-1)s$ ist. Die rechte Seite der Gleichung (10) besitzt keinen Term, der $XY^{n-2}Z$ enthält. Also muß $s=0$ gelten. Widerspruch! Der Fall 2-b) kann also nicht eintreten. Damit ist Theorem 3.1. vollständig bewiesen. $\square$

<u>BEMERKUNG:</u> Auch Theorem 3.1.* hat gezeigt, daß sich die biholomorphen Äquivalenzklassen der dort behandelten Riemannschen Flächen vollständig durch die Verzweigungspunkte der meromorphen Projektion x beschreiben lassen. $\square$

Da für $\lambda \notin \{0,1\}$ die Riemannschen Flächen $V_\lambda : y^4 = x(x-1)(x-\lambda)$ ersichtlich singularitätenfrei sind, ergibt sich der Fall $n = 4$ aus Corollar 2.1. als ein Spezialfall von Theorem 3.1.

SCHLUSSBEMERKUNG: Es wurde bereits erwähnt, daß es im Fall $(n,r) = (4,2)$ nicht bekannt ist, ob Theorem 3.1. gültig bleibt. Die Aussage von Theorem 3.1. bleibt natürlich für diejenigen singularitätenfreien Quartiken $Q \subset \mathbb{P}^3$ gültig, die gleichungsdefiniert sind wie in Theorem 3.1. und für die Satz 3.1. gültig bleibt. Der Beweis zu Theorem 3.1. zeigt sogar, daß es genügt, zu je zwei solchen biholomorph äquivalenten Quartiken $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{P}^3$ auch nur eine einzige biholomorphe Abbildung $f: Q_1 \to Q_2$ zu finden, die die Restriktion einer projektiven Transformation ist. Die Schwierigkeiten beim Nachweis einer solchen biholomorphen Abbildung liegen in den folgenden Sachverhalten.

Sei $n \geq 3$, $r \geq 2$, und $L \subset \mathbb{P}^{r+1}$ sei eine singularitätenfreie Hyperfläche vom Grad n. Die Gruppe aller biholomorphen Abbildungen $f: L \to L$, die die Restriktion einer projektiven Transformation sind, sei mit $Lin(L)$ bezeichnet. $Lin(L)$ ist endlich. [s. Matsumura H. / Monsky P. [1]; Theorem 1, S. 348]

Sei $Aut(L)$ die Automorphismengruppe von L. Im Fall $(n,r) \neq (4,2)$ gilt: $Aut(L) = Lin(L)$. [s. Matsumura H. / Monsky P. [1]; Theorem 2, S. 352]

Im Fall $(n,r) = (4,2)$ jedoch, gibt es singularitätenfreie Quartiken L, die eine unendliche Automorphismengruppe $Aut(L)$ besitzen. [s. Matsumura H. / Monsky P. [1]; Theorem 4, S. 353]

Da $Lin(L)$ auch im Fall $(n,r) = (4,2)$ endlich ist, gibt es also singularitätenfreie Quartiken L und biholomorphe Abbildungen $f: L \to L$, die nicht die Restriktion einer projektiven Transformation sind. Beispiele solcher Quartiken kann man innerhalb der Klasse derjenigen singularitätenfreien Quartiken $L \subset \mathbb{P}^3$ finden, die eine singularitätenfreie Kurve C vom Geschlecht $g = 2$ und vom Grad 6 enthalten. [s. Matsumura H. / Monsky P. [1], S. 353].

Es stellt sich die Frage, ob es auch singularitätenfreie Quartiken $L \subset \mathbb{P}^3$ gibt, die gleichungsdefiniert sind wie in Theorem 3.1. und für die gilt: $\operatorname{ord}(\operatorname{Aut}(L)) > \operatorname{ord}(\operatorname{Lin}(L))$. Eine Antwort auf diese Frage scheint noch nicht bekannt zu sein. $\square$

LITERATURVERZEICHNIS

Bücher und Monographien

[1] Ahlfors L.V./Sario L. [1]:
Riemann surfaces (5th printing),
1974; Princeton University Press

[2] Farkas H.M./Kra I. [1]:
Riemann surfaces,
1980; Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin

[3] Forster O. [1]:
Riemannsche Flächen,
1977; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

[4] Gunning R.C. [1]:
Vorlesungen über Riemannsche Flächen,
1972; Bibliographisches Institut, Mannheim

[5] Hartshorne R. [1]:
Algebraic geometry (corr. 3rd printing),
1983; Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin

[6] Iitaka S. [1]:
Algebraic geometry,
1982; Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin

[7] Kendig K. [1]:
Elementary algebraic geometry (2nd printing),
1984; Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo

[8] Mumford D. [1]:
Algebraic geometry I: Complex projective varieties (corr. 2nd printing),
1976; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

[9] Mumford D. [2]:
Curves and their Jacobians,
1975; Ann Arbor - The University of Michigan Press

[10] Namba M. [2]:
Families of meromorphic functions on compact Riemann surfaces,
1979; Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York

[11] Walker R.J. [1]:
Algebraic curves,
1978; Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin

Originalarbeiten

[1] Duma A./Radtke W. [1]:
Galoissche dreiblättrige Überlagerungen der Zahlenkugel vom Geschlecht ≥ 3,
1983; Seminarberichte aus dem Fachbereich Mathematik u. Inf. d. Fernuniv. Hagen, Nr. 18 (S. 55-S. 114)

[2] Kuribayashi A. / Komiya K. [1]:
On Weierstrass points and automorphisms of curves of genus three – in: Algebraic geometry; edited by K. Lønstedt (S. 253 – S. 299), 1979; Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York

[3] Kuribayashi A. / Yoshida K. [1]:
On the non-hyperelliptic compact Riemann surfaces defined by $Y^4 = X(X-1)(X-t)$, 1978; Bul. Fac. Sci. & Eng. Chuo Univ, Vol. 21 (S. 13 – S. 27)

[4] Matsumura H. / Monsky P. [1]:
On the automorphisms of hypersurfaces, 1964; J. Math. Kyoto Univ., 3-3 (S. 347 – S. 361)

[5] Namba M. [1]:
Equivalence problem and automorphism groups of certain compact Riemann surfaces, 1981; Tsukuba J. Math; Vol. 5 No. 2 (S. 319 – S. 338)