Prüfungsprotokoll 01681 Einführung in die berechenbare Analysis Informatik Diplom II

Datum: 14.03.2006
Prüfer: Prof. Weihrauch
Dauer : ca. 30 Min
Note : 1,3

Nach ein paar einleitende Worte zum Studium allgemein kam Prof. Weihrauch erst zum Thema.

Im Grundstudium hatten wir ja Berechenbarkeit auf Zahlenfunktionen, rekursiev Mengen, r.a kennengelent. Dann Berechenbarkeit auf Wortfunktionen und Numerierungen. Nun wollen wir weitergehen zu den reelen Zahlen. Welche Probleme gibt es da?
Natürlichen Zahlen sind abzählbar unendlich. Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Wie lösen wir dieses Problem?
Wir definieren Berechenbarkeit auf unendlichen Wortfolgen und nutzen diese Berechenbarkeit, um Berechenbarkeit auf den reellen Zahlen zu definieren.

Wie machen wir das? Was nutzen wir da?
Turingmaschine reicht dafür nicht mehr aus, diese kann nur endliche Wortfolgen bearbeiten. Wir nutzen jetzt die sog. Typ-2-Maschinen. Dieses sind Turingmaschinen, bei denen der Ein- und Ausgaberaum spezifiziert wird, ob Σ^* oder Σ^N. Ein- und Ausgaberaum können separat spezifiziert werden, sprich Eingabe kann unendliche Zeichenfolge sein, Ausgabe nur endlich.

Wann ist eine Typ-2-Maschine definiert?
Bei endlicher Ausgabe soll sie nach endlicher Zeit halten, bei unendlicher Ausgabe darf sie unendliche rechnen, aber sie muss auch unendlich viele Zeichen auf dem Ausgabeband ausgeben.

Welche Operationen sind auf dem Ausgabeband erlaubt? Warum?
Ausgabe muss unveränderlich sein, sprich wir wollen die Ausgabe als physikalische Ausgabe sehen. Für temporäre Ausgaben haben wir schließlich die Arbeitsbänder. Daher nur schrieben und gehe rechts auf Ausgabeband erlaubt.

Dann kommen wir zu der Darstellung reeller Zahlen. Das Naheliegendste ist ja meist das Richtige. Wie verhält es sich mit der Dezimaldarstellung?
Dezimaldarstellung ist das Naheliegendste für den Menschen aber leider für das Rechnen nicht geeignet. **Warum?** Das sehen wir schon an dem Beispiel 3*x. **Wie wird das gezeigt?** Beweis aus dem Kurstext aufgeführt mit 1/3 * 3, da entweder 0,9999... oder 1,0000....

Welche andere Darstellung haben wir kennen gelernt, die sich für das Rechnen mit reellen Zahlen eignet?
Die Cauchy Darstellung in Worten erklärt: Folge von rationalen Zahlen, deren Limes die Zahl

x ist und deren Folgenglieder das Cauchy Kriterium erfüllen $|\nu_Q(v_i) - \nu_Q(v_j)| \leqq 2^{-i}$ für alle j > i.

Wieso ist das Cauchy Kriterium so wichtig?
Damit kann man bereits nach einer endlicher Anzahl gelesener Folgenglieder ausreichend Informationen zu der Zahl erhalten. Stichpunkt: schnelle konvergente Folge.

Welche Funktionen sind mit dieser Darstellung auf R bb?
Add, Mult, Div, Sub, additive Inversion, additive Multiplikation, Betrag, min, max, Projektion, Polynome mit bb Koeffizienten, Potenzreichen und damit auch exp und log.

Wann ist eine reelle Zahl bb?
Wenn diese ρ_C-bb ist, sprich wenn ich einen ρ_C-berechenbaren Namen für diese Zahl finden kann. Da hat er dann noch ergänzt: genau, wenn es eine Turingmaschine gibt, die mir diesen Namen aufschrieben kann.

Sind denn alle reellen Zahlen bb?
Nein. Warum nicht? Es gibt nur abzählbare viele Turingmaschinen aber überabzählbar viele reellen Zahlen.
Wie konstruliert man denn eine nicht bb-Zahl?
Nun wir wissen, dass 2^{-A} eine Zahl bb ist genau dann, wenn die Menge A eine rek. Menge ist. Wenn nun A nicht rek. Ist, so ist 2^{-A} nicht bb.

Mengendarstellung
Hier reichte die Erklärung in Worten, dass eine Menge entweder ein Auflistung der offenen Kugeln ist, die die Menge schneidern oder der abgeschlossenen, die die Menge nicht schneiden. **Was für Kugeln müssen das sein?** Rationale Kugeln.

Warum Einschränkung auf abgeschlossene Mengen?
Wenn wir alle Mengen aus R^n zulassen, dann werden es wieder zu viele. Daher Einschränkung auf mathematisch interessante Mengen, nämlich die abgeschlossenen.

Wann ist eine abgeschlossene Menge r.a.
Ich habe die Def. mit der bb Abstandfunktion genannt, er wollte gerne den $\alpha_<$ Bezug haben. Aber den hatte ich nicht drauf. Hat er mir erklärt: man nähert sich von außen oder von Innen an die Menge.

Was heißt den α bb?
Eine Auflistung sowohl der offenen Kugeln, die die Menge schneiden, als auch de abgeschlossenen Kugeln, die die Menge nicht schneiden.

Funktionsdarstellung
Hier habe ich die Darstellung aufgeschrieben, damit ich diese besser erklären konnte. Wichtig war das Urbild jeder offenen Kugel zu erwähnen, diese ist dann wieder die Vereinigung offener Kugeln im Definitionsraum.

Warum Einschränkung auf C(A,R)?
Auch wieder die Mächtigkeit der Menge. Daher Einschränkung auf stetige Funktionen.

Wie zeigt man, dass eine Funktion nicht bb ist?
Zuerst wird Überprüft, ob diese stetig ist. Danach mit einem Widerspruchsbeweis: heißt, wir nehmen an, diese ist BB, so dass es eine Typ-2-Maschine gibt, die diese berechnet und leitet einen Widerspruch her.

Warum ist δ^A so wertvoll? Was kann man damit tun?
Nun, man kann Funktionswerte ausrechnen und die Komposition sowie Zusammensetzungen unter bestimmten Operationen sind wieder bb. Operationen wie z.B. Addition (f+g).

Gibt es noch andere Funktionsdarstellungen? Wie verhalten diese sich zu δ^A?

δ^A ist maximal, so dass alle anderen Darstellungen sich auf δ^A reduzieren lassen.

Nullstellen. Kann man diese immer berechnen? (Einschränkung auf Intervall [0;1] war von ihm direkt vorgegeben)
Nein, das Problem ist nicht entscheidbar.

Nun weiß der Mathematiker, dass es laut Zwischenwertsatz, eine NS geben muss. Wie lautet der Satz, wie kann man die Nullstelle berechnen?
Erläutert, dass $f(0) < 0 < f(1)$, dann muss es eine NS geben, wenn die Funktion stetig ist. Bisektion erklärt.

Warum können wir die Bisektion nicht nutzen, um Nullstelle zu berechnen?
Der Vergleich <= 0 ist nicht entscheidbar. Daher nutzen wir die Trisektion. Hier auch erklärt, dass das Intervall in 3 Teile geteilt wird und die Entscheidung fällt aufgrund des Vergleiches $f(a)*f(b)<0$. Achtung: hier die Einschränkung auf Funktionen mit EINER Nullstelle, sonst $f(a)*f(b) = 0$ und $f(c)*f(d) = 0$

Prof. Weihrauch ist sehr angenehm, da kann ich mich den anderen Meinungen nur anschließen. Er hatte die Frage sozusagen zur Laufzeit aus dem Gedächtnis gekramt und immer wieder ein Resume gezogen, was schon angefragt wurde. So hatte man immer 5 Sek. zum Durchatmen. Die Prüfung hat zwar was länger gedauert, aber er hat mich nie unter Druck gesetzt. Die Fragen wurden schon in der Reihenfolge des Kurstextes gestellt. Eine ehrliche Antwort, wenn einem was entfallen ist oder gar nicht präsent wurde nicht negativ bewertet.
Alles Gute Euch auch bei den Prüfungen.