Prüfungsprotokoll
Kurs: Numerische Mathematik I (01271)
Datum: 30.08.2007, 10:00 Uhr, Dauer: ca. 30 min
Prüfer: HDoz. Dr. Felten
Beisitzer: Herr Horst
Note: 1,0

Auch bei Herrn Dr. Felten hat man die Möglichkeit einen Kurzvortrag von 5min zu halten (hab mich dagegen entschieden). Ich sollte dann zu einem Thema meiner Wahl erstmal was erzählen.
Fragen:

- **Wahlthema für den Einstieg: KE3, algebraische Interpolation**
  - Interpolationsaufgabe beschrieben, $(n+1)$ Stützstellen, an diesen sollen die Stützwerte interpoliert werden.
  - Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms beweist man mit dem Hauptsatz der Algebra.
  - Existenz folgt aus der direkten Angabe eines solchen Interpolationspolynoms.
- **Sind die Stützstellen denn alle verschieden?**
  - Ja, die Stützstellen sind paarweise verschieden, die Stützwerte können natürlich gleich sein.
- **Wie sieht nun das Interpolationspolynom aus?**
  - Lagrangeform angegeben, Hinweis gegeben, dass bei den Lagrangegrundpolynomen ein LGS mit der Einheitsmatrix und bei der Newton-Darstellung ein LGS mit einer unteren Dreiecksmatrix als Koeffizientenmatrix folgt, beide also eindeutig lösbar sind.
- **Wie sieht denn die Newton-Darstellung aus?**
  - Newton-Grundpolynome definiert, auf Wunsch von Herrn Dr. Felten in der expliziten Form. Die Koeffizienten zunächst in der Darstellung $a_j(y_0...y_j) = \sum_{\nu=0}^{j} w_j y_j$ beschrieben. Danach sollte ich sie als dividierte Differenzen angeben.
- **Nehmen wir mal an, die Funktion sei zusätzlich stetig differenzierbar, wie könnte man dann die dividierten Differenzen angeben?**
  - Peano-Darstellung der dividierten Differenzen mit dem B-Spline B_{m-1} angegeben.
  - Auf Nachfrage von Herrn Dr. Felten die B-Splines erklärt inkl. der truncated power function.
- **Eigenschaften der B-Splines?**
  - Träger zwischen x_0 und x_m, verschwindet mit den ersten $m-2$ Ableitungen außerhalb dieses Intervalls. Außerdem sind sie in diesem Intervall strikt positiv.
- **Was versteht man denn unter Quadratur?**
  - Quadratur erläutert. Sollte dann die Quadraturgleichung angeben, also die Darstellung des Integrals als Summe mit einer Restfunktion. Dr. Felten betonte, dass die Gleichheit gilt (klar, wegen der Restfunktion).

 - Als nächstes sollte ich die Koeffizienten in der Quadraturgleichung erläutern (über die Integrale der Lagrange-Grundpolynome).

- **Für welche Funktionen ist diese Quadratur denn exakt?**
  - Mit $R_k(f)$ soll sie ja exakt für Polynome vom Grand k sein und gilt $k \geq m$ so ist die Quadratur interpolatorisch...oder so ähnlich:-)
  - Dr. Felten wollte dann wissen, wie hoch man denn die Exaktheit treiben kann? Antwort steht auf S. 92: $k \leq 2m+1$, wusste ich aber nicht. Herr Dr. Felten erklärte dann noch kurz, warum es für $2m+2$ nicht mehr klappt.

- **Gehen wir jetzt mal zu den Splines, was sind denn Bernstein-Polynome? Was sind die Eigenschaften dieser Polynome?**
  - Bernstein-Polynome definiert.
  - Eigenschaften aufgezählt, also Maximum, strikte Positivität zwischen 0 und 1, Nullstellen bei 0 und 1, Summe über alle Bernstein-Polynome ergibt 1, Summe über das Produkt der Bernstein-Polynome mit $\frac{\nu}{n}$ ergibt t. Hab dann gesagt, dass man die Eigenschaft später noch benutzt, wusste dann aber nicht aus dem Stand, in welchem Beweis man das gebraucht. Habe dann einfach gesagt, dass das an späterer Stelle eventuell wieder auftauchen wird. Spätestens an dieser Stelle merkte man, dass die Prüfungsatmosphäre bei Herrn Dr. Felten sehr sehr angenehm ist.

- **Was sind Bézier-Kurven?**
  - Bézier-Koeffizienten, -Punkte, -Kurven erklärt, Sinn und Zweck dieser Kurven erläutert (Annäherung an die Funktion im Intervall $[0;1]$ an die Funktion), Einschließungssatz angegeben (konvexe Hülle der Bézierpunkte).

- **Wie werte ich ein Polynom in der Bézier-Darstellung aus?**
  - de Casteljau-Algorithmus anhand des Dreieckschemas erklärt.

- **Es gibt ja noch eine andere Art einen Graphen einzuschließen, wie macht man das? (Frage war sicherlich schöner formuliert;-)**
  - de Boor-Punkte erklärt und den lokaleren Charakter der Einschließung erläutert.

- **Wie interpoliere ich auf dem komplexen Einheitskreis? Wie sieht das Interpolationspolynom aus?**
  - Komplexe Einheitswurzeln und primitive komplexe Einheitswurzeln erklärt. Auf Wunsch von Herrn Dr. Felten die Eigenschaften der Einheitswurzeln erläutert.
  - Interpolationspolynom (in der Monom-Darstellung und nicht als trigonometrisches Polynom erklärt). Eigenschaften der Matrix W_N aufgezeigt und die diskreten Fourier-Koeffizienten hingeschrieben.
  - Da die Zeit knapp wurde und Herr Dr. Felten alle Kurseinheiten prüfen wollte, bat er mich, die Zeitersparnis durch FFT zu nennen. Für $N = 2^k$ braucht FFT statt N^2 nur kN Berechnungen. Er hat dann noch kurz an der Summe erklärt, wie man auf die N^2 kommt.

- **Gehen wir schnell zur Approximation. Was ist das Proximum?**
  - Proximum erklärt. Zunächst mal gibt es stets ein Proximum.
- **Wie zeigt man die Existenz? Nur eine kurze Beweisidee...**
  - Man definiert eine kompakte Menge und eine stetige Funktion auf dieser Menge...
- **ja, reicht schon. Es ist ein Kompaktheitsargument, das man benutzt. Wie sieht das nun aus, wenn man den Vektorraum mit einem Skalarprodukt ausstattet und hierdurch die Norm induziert?**
  - Proximum ist eindeutig für die von dem Skalarprodukt induzierte Norm.
  - Beweisidee gegeben (strenge Konvexität der Einheitskugel in einem unitären VR).
  - Sollte dann kurz beschreiben, welche Eigenschaft die Einheitskugel aufweist (enthält kein Geradenstück, wusste ich aber nicht).
- **Für welche Normen gilt diese Aussage denn noch?**
  - Anscheinend für strikte Normen, die aber meines Wissens nicht im Kurs stehen. Herr Dr. Felten hat das dann kurz erklärt und nach der Prüfung mal nachgeschaut, stand nicht im Kurstext:-)
- **Erklären Sie den ersten Schritt bei der Cholesky-Zerlegung.**
  - Erstmal gesagt, dass die Matrix pos. definit sein muss. Pos. Definitheit erklärt, Cholesky-Zerlegung erklärt.
  - Sollte dann kurz erklären, warum man so einfach die Wurzel aus den Elementen a_{ii} ziehen darf. Antwort: Diese sind ja die Diagonaleinträge der Matrix und da die Matrix pos. definit ist, sind die Einträge $a_{ii} > 0$.
- **In KE 8 betrachten wir ja schwach besetzte Matrizen. Was ist ein Graph? Wie kann ich dem Besetzungsmuster einer Matrix einen Graphen zuordnen? Was ist da der wichtigste Algorithmus und wie funktioniert er?**
  - Graph, Zuordnung Matrix-Graph, Cuthill-McKee-Algorithmus erklärt.
  - Sollte dann für einen simplen Graphen (5 Knoten, alle durch eine Gerade miteinander verbunden) die Schichtung, pseudo-periphere und periphere Knoten erklären. An einem größeren Graphen (alle Knoten jeweils miteinander verbunden) sollte ich dann den Cuthill-McKee-Algorithmus durchführen. An der Schichtung sah man dann das Vorgehen des Algorithmus.

Ende

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:
Herr Dr. Felten ist ein sehr freundlicher Prüfer und uneingeschränkt zu empfehlen. Für die Prüfung hatte er einen Stapel Karteikarten, auf denen wohl die wichtigsten Themen des Kurses draufstanden. Die Fragen waren vollkommen verständlich und man weiß jederzeit, worauf er hinaus möchte. Beweisideen kamen nur einige wenige dran, auch kleinere Ungenauigkeiten bei den Formeln oder der

Formulierung fallen nicht ins Gewicht. Da er sich genau an die Zeitvorgabe hält, jedoch den gesamten Stoff zumindest in Grundzügen abprüfen möchte, kann es wohl zum Ende etwas hektisch werden (was ja nicht schlimm ist, man muss nur mit den schnellen Sprüngen von Kurseinheit zu Kurseinheit klar kommen). Diesen Eindruck hat auch ein Kommilitone in einem Protokoll zur Computergrafik geschildert, so dass Herr Dr. Felten wohl grundsätzlich so prüft. Alles in allem ist Herr Dr. Felten als Prüfer wirklich uneingeschränkt zu empfehlen.