Kurs 1183
Mathematatik für Informatiker III
Teil 2 Diskrete Stochastik

Aufgabensammlung zusammengestellt von Annerose Heim

Aufgabe 1:

Sei $(\Omega | P)$ ein W-Raum und $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ seien Ereignisse mit $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Man berechne $P(A^c)$, $P(B \setminus A)$ und $P(A \setminus B)$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(B \setminus A) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \setminus B) = P(A \setminus (B \cap A)) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$$

Aufgabe 2:

Eine ZV X sei $B(2,p)$-verteilt und es gelte

$P(X=2) = 0{,}16$. Man berechne p.

$$0{,}16 = P(X=2) = \binom{2}{2} p^2 \cdot (1-p)^{2-2} = p^2, \quad \text{also}$$

$$p = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$$

Teil 2 Diskrete Stochastik

Aufgabe 3

sei (Ω, P) ein W-Raum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$
seien stochastisch unabhängige, quadratisch integrierbare
ZVen mit $E(X) = E(Y) = 1$ und $V(X) = V(Y) = 2$.

a) Man bestimme den Erwartungswert der ZV
$\alpha X + \beta Y$ (für bel. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

b) Man bestimme die Varianz.

zu a)

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y) = \alpha + \beta$$

zu b)

Mit X, Y sind auch αX und βY stochastisch unabhängig.
Daher gilt $V(\alpha X + \beta Y) \underset{\text{Unabhängigkeit}}{=} V(\alpha X) + V(\beta Y)$

$$= \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

Teil 2 Diskrete Stochastik

Aufgabe 4

Sei (Ω, P) ein W-Raum und A, B seien die Ereignisse

a) Welche Beziehung besteht zwischen den Wahrschein
der Ereignisse $A, B, A \cap B, A \cup B$?

b) Sei C ein weiteres Ereignis mit $A \cap B \subset C$.
Man zeige, daß $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$.

zu a)

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$$

zu b)

$$P(C) \geq P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cup B)}_{\leq 1} \geq P(A) + P(B) - 1$$

Aufgabe 5

Ein unverfälschter Würfel wird 2 mal geworfen. X bezeich
dabei auftretende Augensumme. Man berechne die Wahr
lichkeit $P(\{10 < X \leq 12\})$

X ist nur 11 oder 12

$$\{10 < X \leq 12\} = \{X = 11\} + \{X = 12\}$$

$$= \{(5,6), (6,5)\} + \{(6,6)\}$$

$$= \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$$

also ist $P(\{10 < X \leq 12\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Teil 2 Diskrete Stochastik

Aufgabe 6

X, Y seien quadratisch integrierbar.

a) Wie ist die $Kov(X,Y)$ definiert?

b) Was ist $Kov(X,X)$?

c) Man gebe die Beziehungen zwischen den folgend 3 Aussagen an:

1) X und Y sind stochastisch unabhängig.

2) $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

3) $Kov(X,Y) = 0$

zu a)

$$E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

zu b)

$$E((X - E(X))^2) = \text{Varianz von } X = V(X)$$

zu c)

2) $\Leftrightarrow$ 3)

1) $\Rightarrow$ 2) : 2) $\not\Rightarrow$ 1)

Teil 2 diskrete Stochastik

Aufgabe 7

Sei (Ω, P) ein W-Raum und $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ seien stochastisch unabhängig. Man zeige, daß dann auch A, B^c stochastisch unabhängig sind.

$$P(A) \cdot P(B^c) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A \cap B^c)$$

Aufgabe 8

Die ZV X sei $B(1, p)$ verteilt. Man bestimme die Verteilung der ZV $Y := 1 - X$.

X kann nur 0 und 1 annehmen.

1 mit Wahrscheinlichkeit p

0 mit $1 - p$

Mit X kann auch Y nur die Werte 0 und 1 an

wobei $P(Y = 1) = P(X = 0) = 1 - p$

und $P(Y = 0) = P(X = 1) = p = 1 - (1 - p)$

Daher ist Y $B(1, 1 - p)$ verteilt.

...

...ufgabe 9

$X_1, \ldots, X_n$ seien n stochastisch unabhängige, quadr...
integrierbare ZV mit $V(X_i) = \sigma^2$ für $i = 1, \ldots, n$
Man berechne die Varianz des arithmetischen Mittel...

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

...ufgabe 10

X sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ u...
Varianz $\sigma^2 > 0$
Man bestimme Erwartungswert und Varianz de...
Zufallsvariablen ZV $Y := \frac{X - \mu}{\sigma^2}$

$$E(Y) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \left(E(X) - E(\mu)\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(E(X) - \mu\right) = 0$$

$$\cdot \sigma^2$$

$$\frac{1}{\ldots} V(X) = \frac{1}{\ldots}$$

Teil 2 diskrete Stochastik

Aufgabe 11

a) wie lautet die Tschebyscheffsche Ungleichung

b) X sei eine $\Pi(\lambda)$-verteilte ZV. Man zeige, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$P(\{|X-\lambda| < \varepsilon\}) \geq 1 - \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \text{ gilt.}$$

zu a)

wenn X quadratisch integrierbar ist

$$\Rightarrow P(\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

zu b)

Es ist $E(X) = V(X) = \lambda$

Setzt man $A = \{|X-\lambda| \geq \varepsilon\}$ so gilt nach a)

$$P(A) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda}{\varepsilon^2}$$

also

$$P(\{|X-\lambda| < \varepsilon\}) = P(A^c) = 1 - P(A) \geq 1 - \frac{\lambda}{\varepsilon^2}.$$

Aufgabe 12

Ein unverfälschter Würfel wir 2 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens eine der beiden geworfenen Zahlen gerade ist?

Das Komplementärereignis lautet:
"beide geworfenen Zahlen sind ungerade."

Dieses hat die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{|\{1,3,5\}^2|}{|\{1,\dots,6\}^2|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, die gesucht ist, gleich

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{}$$

Teil 2 Diskrete Stochastik

Aufgabe 13

Sei P die Gleichverteilung auf $\Omega = \{-1, 0, 1\}$

d.h. $P(\{-1\}) = P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{3}$.

die ZV von $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$X(-1) = -1, \quad X(0) = 0, \quad X(1) = 1$

$Y(-1) = 1, \quad Y(0) = 2, \quad Y(1) = 3$

Man berechne $E(X)$, $E(Y)$ und $Kov(X, Y)$

Sind X, Y stochastisch unabhängig?

$$E(X) = (-1)\frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$E(X \cdot Y) = (-1)\frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Kov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{2}{3}$$

Wegen $Kov(X, Y) \neq 0$ sind X, Y nicht stoc

unabhängig.

Teil 2 Diskrete Stochastik

Aufgabe 14

Sei (Ω, P) ein W-Raum und $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit

$P(A) > 0$ und $P(B) > 0$.

a) Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B definiert?

b) Man zeige A, B seien stochastisch unabhängig genau dann, wenn $P(A|B) = P(A)$.

zu a) $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teil 2 Diskrete Stochastik

Aufgabe 15

$$E_P(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

$$E_P(X) = E_{P_X}(id)$$

Ein unverfälschter Würfel wird 2 mal geworfen.
Die ZV X bezeichnet die Anzahl der dabei auftretenden
Sechsen. Man berechne $E(X)$ und $V(X)$.

Hier ist P die Gleichverteilung $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$
Dann kann X nur $\{0, 1, 2\}$ sein und zwar ist

$\{X = 2\} = \{(6,6)\}$

$\{X = 1\} = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6),$

$\{X = 0\} = \{1, \dots, 5\}^2$

$$\Rightarrow E(X) = E_{P_X}(id) = 0 P_X(\{0\}) + 1 \cdot P_X(\{1\}) + 2 P_X(\{2\})$$
$$= 1 \cdot P(X=1) + 2P(X=2) = \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = E_{P_X}(id^2)$$
$$= 0 P_X(\{0\}) + 1^2 P_X(\{1\}) + 2^2 P_X(\{2\})$$
$$= 1 P(X=1) + 4 P(X=2) = \frac{10}{36} + \frac{4}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

Also $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{18} - \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$