Kurs 1183
Mathematik für Informatiker III
Teil 1 Numerik

Aufgabensammlung zusammengestellt von Annerose Heim

Klausurtraining Mathematik für Informatiker III
Kurs 01183
Teil 1: Numerik

Aufgabe 1)

i) Sei $A \in Mat_n(\mathbb{K})$. Welche Matrixoperation bewirkt eine Permutation der Zeilen (bzw. Spalten) von A

ii) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{K})$ invertierbar. Wie lautet A^{-1}

iii) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie lautet A^{-1}?

Lösung:

zu i) Multiplikation mit Permutationsmatrix von links bei Zeilen bzw. von rechts bei Spalten

zu ii)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

zu iii)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie über die Richtigkeit folgender Aussa

	richtig	falsch
i) Mit dem Horner-Schema kann man auch Ableitungswerte eines Polynoms berechnen.	☒	☐
ii) Jedes Polynom besitzt nur endlich viele Nullstellen.	☐	☒
iii) Jedes nichtkonstante Polynom besitzt eine reelle Nullstelle	☐	☒
iv) Jedes Polynom ist eine Linearkombination von Monomen	☒	☐
v) Das Produkt zweier Polynome ist ein Polynom	☒	☐

Aufgabe 3:

a) Die Daten x_1, x_2 seien näherungsweise gemäß
$x_i = \tilde{x}_i - \varepsilon_i$, $i = 1,2$ bekannt. δ_1 und δ_2 seien die entsprechenden relativen Fehler. Es seien η bzw. ξ der absolute bzw. relative Fehler des Produktes, das aus x_1 und x_2 durch Addition, Multiplikation od. Division entsteht.

Dann gilt:

	richtig	falsch
i) für die Addition $\eta \doteq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$	$\boxed{X}$	$\square$
ii) für die Multiplikation $\eta \doteq \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_1 x_1$	$\square$	$\boxed{X}$
iii) für die Multiplikation $\xi \doteq \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2$	$\square$	$\boxed{X}$
iv) für die Division $\eta \doteq \frac{1}{x_2}\varepsilon_1 - \frac{x_1}{x_2^2}\varepsilon_2$	$\boxed{X}$	$\square$

b) Man gebe den absoluten und relativen Fehler für die Funktion $f(x_1, x_2) := 3x_1^2 - 2\cos x_2$ an.

Gemäß 1.3.4 ist der absolute Fehler

$$\eta \doteq \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\varepsilon_2 = 6x_1\varepsilon_1 + 2\sin x_2 \cdot \varepsilon_2$$

Gemäß 1.3.5 ist der relative Fehler

$$\xi = \frac{x_1}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\delta_1 + \frac{x_2}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\delta_2$$

$$= \frac{1}{f(x)}\left(6x_1^2\delta_1 + 2x_2 \sin x_2 \delta_2\right)$$

für $x = (x_1, x_2)$ und $f(x) \neq 0$

Teil 1 Numerik

Aufgabe 4:

a) Es sei U_n das n-te Čebyšev-Polynom 2. Art und $p \in \Pi_4$ sei gegeben durch $p(x) = 4x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 1$.
Entwickeln Sie p nach den U_n und bestimmen Sie anschließend $p(2)$ mit dem Clenshaw-Algorithmus.

b) Entwickeln Sie p um den Punkt $x_0 = 2$ in seine Taylorreihe. Verwenden Sie dazu das vollständige Horner-Schema.

Lösungen:

zu a)

Es ist $U_0(x) = 1$

$U_1(x) = 2x$

$U_2(x) = 2x\,U_1(x) - U_0(x) = 4x^2 - 1$

$U_3(x) = 2x(4x^2 - 1) - 2x = 8x^3 - 4x$

$U_4(x) = 2x(8x^3 - 4x) - (4x^2 - 1) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

Ansatz: $p_n(x) = 4x^3 + 8x^3 + 7x^2 + 1 = \alpha_0 U_0(x) + \alpha_1 U_1(x) + \alpha_2 U_2(x) + \alpha_3 U_3(x) + \alpha_4 U_4(x)$

$= \alpha_0 + 2\alpha_1 x + \alpha_2(4x^2 - 1) + \alpha_3(8x^3 - 4x) + \alpha_4(16x^4 - 12x^2 + 1)$

$= 16\alpha_4 x^4 + 8\alpha_3 x^3 + (4\alpha_2 - 12\alpha_4)x^2 + (2\alpha_1 - 4\alpha_3)x + \alpha_0 - \alpha_2 + \alpha_4$

Koeffizientenvergleich liefert nun:

$16\alpha_4 = 4 \Rightarrow \alpha_4 = \frac{1}{4}$

$8\alpha_3 = 8 \Rightarrow \alpha_3 = 1$

$4\alpha_2 - 12\alpha_4 = 7 = 4\alpha_2 - 3 \Rightarrow 4\alpha_2 = 10 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{5}{2}$

$2\alpha_1 - 4\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2$

$\alpha_0 - \alpha_2 + \alpha_4 = \alpha_0 - \frac{9}{4} = 1 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{13}{4}$

Somit gilt $p(x) = \frac{1}{4} U_4(x) + U_3(x) + \frac{5}{2} U_2(x) + 2U_1(x) + \frac{13}{4} U_0(x)$

Teil 1 Numerik

Aufgabe 4

Lösung zu a) Fortsetzung:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{13}{4} \\
 & - & - & -\frac{1}{4} & -2 & -\frac{41}{4} \\
2 & - & 1 & 8 & 41 & 164 \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 2 & \frac{41}{4} & 41 & \boxed{157} = p(2)
\end{array}
$$

Lösung zu b)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{p^{(k)}(2)}{k!} \cdot (x-2)^k$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 4 & 8 & 7 & 0 & 1 \\
2 & - & 8 & 32 & 78 & 156 \\
\hline
 & 4 & 16 & 39 & 78 & \boxed{157}\ a_0^{(1)} \\
2 & - & 8 & 48 & 174 & \\
\hline
 & 4 & 24 & 87 & \boxed{252}\ a_1^{(2)} & \\
2 & - & 8 & 64 & & \\
\hline
 & 4 & 32 & \boxed{151}\ a_2^{(3)} & & \\
2 & - & 8 & & & \\
\hline
 & 4 & \boxed{40}\ a_3^{(4)} & & & \\
2 & - & & & & \\
\hline
 & \boxed{4}\ a_4^{(5)} & & & &
\end{array}
$$

$a_k^{(k+1)} = \frac{p^{(k)}(2)}{k!}$ für $k = 0 \dots 4$

also $p(x) = 4(x-2)^4 + 40(x-2)^3 + 151(x-2)^2 + 252(x$

Teil 1 Numerik

Aufgabe 5

Gegeben seien die Daten (y_i, t_i) durch folgende Tabelle:

t_i	-3	0	1	1	4
y_i	-2	5	6	2	2

Finden Sie die durch diese Daten eindeutig bestimmte Ausgleichsgerade $y(t) = \alpha^* + \beta^* t$!

Gemäß 3.6.2 erhält man α^*, β^* als Lösung des Systems der Normalgleichungen.

$$\begin{pmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5} t_i \\ \sum_{i=1}^{5} t_i & \sum_{i=1}^{5} t_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \sum_{i=1}^{5} y_i \cdot t_i \end{pmatrix},$$ d.h. von

$$5\alpha^* + 3\beta^* = 13$$

$$3\alpha^* + 27\beta^* = 22$$

Es folgt $\alpha^* = \frac{95}{42}$; $\beta^* = \frac{213}{378}$, d.h.

$y(t) = \frac{95}{42} + \frac{213}{378} t$ ist die gesuchte Ausgleichsgerade.

Teil 1 Numerik
Aufgabe 6

Gegeben sei folgende homogene lineare Rekursion

(*) $x_n = 6x_{n-1} - 8x_{n-2} \qquad n \geq 2$

i) Man bestimme eine Basis des Lösungsraumes dieser Rekursion

ii) Man gebe eine geschlossene Darstellung für die x_n, $n \geq 2$ an wenn die Anfangswerte $x_0 = x_1 = 1$ sind.

zu i)

Für (*) gilt $\sum_{\nu=0}^{2} \beta_\nu x_{n-\nu} = 0$, $n \geq 2$

mit $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -6$, $\beta_2 = 8$

Somit lautet das charakteristische Polynom

$$H(z) = \sum_{\nu=0}^{2} \beta_\nu z^\nu = 1 - 6z + 8z^2$$
$$= 8\left(z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}\right)$$
$$= 8\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)$$

Gemäß 7.5 (1) bilden daher die beiden Folgen

$$x_1 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)_{n \in \mathbb{N}^0} = \left(2^n\right)_{n \in \mathbb{N}^0} \quad \text{und}$$

$$x_2 = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-n}\right)_{n \in \mathbb{N}^0} = \left(4^n\right)_{n \in \mathbb{N}^0} = \left(2^{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}^0}$$

eine Basis der vorgegebenen Rekursion.

Teil 1 Numerik

Aufgabe 6

Lösung zu ii)

Gemäß i) existieren dann $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart, daß

$x_n = \alpha 2^n + \beta 2^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}^0$ gilt.

Dabei ergeben sich α, β wie folgt aus den vorgegebenen Anfangswerten:

$$x_0 = 1 = \alpha 2^0 + \beta 2^0 = \alpha + \beta$$

$$x_1 = 1 = \alpha 2^1 + \beta 2^2 = 2\alpha + 4\beta$$

Lösung dieses Gleichungssystems ist $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$.

Die gesuchte geschlossene Darstellung für x_n lautet also

$$\boxed{x_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n - \frac{1}{2} 2^{2n} = \frac{3}{2} 2^n - \frac{1}{2} 4^n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^0$$

explizite Form

Teil 1 Numerik

Aufgabe 7

Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

i) Man gebe die LR-Zerlegung von A an.

ii) Mit Hilfe von i) löse man das lineare Gleichungssys.

$Ax = b$ und berechne det A.

zu i)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad l_{21} = -\frac{1}{2} \qquad l_{31} = -1$$

also $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dann $A^{(2)} = L_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es folgt wegen $l_{32} = 0$ $\quad L_2 = E_3$ und somit

$R = L_2 L_1 A = A^{(2)}$ und $L := L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teil 1 Numerik

Aufgabe 7

Lösung ii)

$Ax = b \iff Ly = b \quad Rx = y$

Nun hat $Ly = b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Lösung

$y_1 = 4$

$\frac{1}{2} y_1 + y_2 = 1 \iff y_2 = 1 - \frac{1}{2} y_1 = -1$

$y_3 = 2 - y_1 = -2$

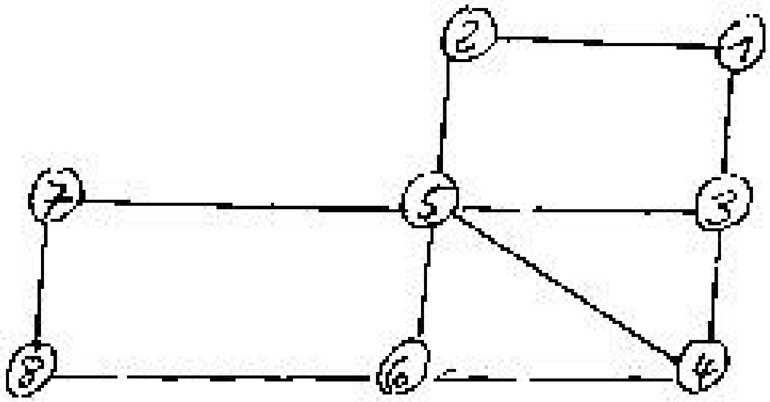
und $Rx = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat die Lösung

$x_3 = -2$, $x_2 = -\frac{10}{3}$, $x_1 = \frac{11}{3}$, d.h.

$\begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$ ist die Lösung von $Ax = b$.

Ferner gilt $\det A = \det L \cdot \det R = 1 \cdot (-3) = -3$

Aufgabe 8



a) Man bestimme mittels Schichtungen ausgehend dem Knoten $x = 5$ einen pseudo-peripheren Knot (nach 4.4.7).

Man erhält 8 (ebenso 1) als einen pseudo-periph Knoten.

b) Man verwende den Cuthill Mc-Kee Algorithmus mi im Teil a) gefundenen pseudoperipheren Knoten, um Graphen G umzunummerieren.

Die folgende Tabelle beschreibt diesen Algorithmus:

i	$y(i)$	$z_i = Adj(y_i) \mid Y$	z_i geordnet	Y geordnet
1	8	$\{6,7\}$	$\{7,6\}$	$\{8,7,6\}$
2	7	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{8,7,6,5\}$
3	6	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{8,7,6,5,4\}$
4	5	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{8,7,6,5,4,2,$

Also lautet die Umnummerierung

$\{8, 7, 6, 5, 4, 2, 3, 1\}$

neu: 1 2 3 4 5 6 7 8

Teil 1 Numerik

Aufgabe 8

Unnummerierter Graph