Prüfungsprotokoll
Kurs: Analysis I (01132)
Datum: 15.01.2007, 9:00 Uhr, Dauer: ca. 25 min
Prüfer: Prof. Dr. Boos
Beisitzer: Dr. Spreng
Note: 1,0

Wie aus den übrigen Protokollen ersichtlich hat man bei Prof. Boos die Möglichkeit einen Kurzvortrag zu halten. Da ich den Prüfungstermin mit der Lehrstuhlsekretärin Frau Sikora abgemacht hatte, fragte Prof. Boos mich zunächst, ob ich einen Vortrag halten möchte, oder ob ich ein bestimmtes Lieblingsthema hätte, mit dem ich anfangen möchte. Ich habe darauf KE 2: Folgen genannt und bin davon ausgegangen, dass ich mit meinem Vortrag anfangen würde. Irgendwie haben wir da aber aneinander vorbei geredet und Prof. Boos hat direkt mit Fragen zu KE 2 angefangen.
Hier die Fragen, die Prof. Boos gestellt hat zusammen mit Zwischenfragen von ihm sowie kleinen Hinweisen, die ich bei der Beantwortung der Fragen gegeben habe.

Fragen:

- Was können Sie uns denn über die Konvergenz von Folgen erzählen?
  - Definition reelle Folge
  - Umgebungskriterium
  - Monotoniekriterium, Zwischenfrage: Was kann man in diesem Fall über den Grenzwert sagen? Entspricht dem sup/inf von a_n
  - ϵ-n_0-Kriterium, Hinweis: Grenzwert muss bekannt sein
  - Notwendiges Kriterium: Beschränktheit
  - Cauchy-Kriterium, Hinweis: Grenzwert muss nicht bekannt sein, Cauchy-Kriterium ist in $\mathbb{R}$ äquivalent zur Konvergenz auf Grund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

  (Im Grunde genommen hätte ich bei meinem Vortrag auch nichts anderes erzählen wollen, es war also nicht so schlimm, dass Prof. Boos gleich angefangen hat zu fragen)
- Wie kann man die Äquivalenz des Cauchy-Kriteriums und der Konvergenz zeigen?
  - Cauchy-Folge ist beschränkt
  - Cauchy-Folge ist konvergent, wenn sie eine konvergente Teilfolge enthält, Hinweis: Teilfolge kurz definiert
  - mit Satz von Bolzano-Weierstraß und der Beschränktheit folgt nun die eine Richtung
  - Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, hier habe ich den Beweis auch formal auf dem Papier geführt, also $|a_n - a_{n0}| < \epsilon$ erweitern mit $-limf + limf$
- Springen wir mal zu den Reihen, und dort insb. zur absoluten Konvergenz, auf welchem Kriterium bauen denn einige andere Konvergenzkriterien auf?
  - Definition abs. Konvergenz gegeben, Hinweis: da bei Reihen mit absoluten Reihengliedern die Folge der Partialsummen monoton steigend ist, muss für die Anwendung des Monotoniekriteriums nur noch die Beschränktheit gezeigt werden.

  - Majoranten- /Minorantenkriterium erläutert

- Daraus folgt dann auch das Wurzel- und das Quotientenkriterium, betrachten wir mal das Wurzelkriterium, wie kann man dies aus dem Majorantenkriterium folgern?
  - Definition Wurzelkriterium
  - Beweis über geometrische Reihe
- Gut, schauen wir uns jetzt mal eine stetige Funktion an, wie hängt der Grenzwert einer Funktion und die Stetigkeit in einem Punkt a zusammen? Definieren Sie bitte vielleicht zuerst mal die wichtigen Begriffe!
  - Definition: Stetigkeit
  - Definition: Stetige Fortsetzung, Zwischenfrage: Da haben sie noch eine Kleinigkeit vergessen!
  - a ist Häufungspunkt von D, Definition Häufungspunkt gegeben, für stetige Fortsetzung nicht wirklich zwingend notwendig, interessant wird es aber erst, wenn a ein Häufungspunkt von D ist. Habe hier noch eine kleine Zeichnung aus dem Buch von Königsberger oder Hildebrandt gezeichnet, um zu verdeutlichen, dass im Fall a kein Häufungspunkt von D mehrere stetige Fortsetzungen von f existieren können.
  - Wenn a in D liegt ist die Existenz des Grenzwertes $f(a)$ äquivalent zur Stetigkeit in a.
- Gehen wir nun zu den Funktionenfolgen, wir unterscheiden dabei punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Die punktweise Konvergenz haben wir ja schon gesehen, was bedeutet denn gleichmäßige Konvergenz?
  - Definition: gleichmäßige Konvergenz mit Hilfe der Norm
  - Zwischenfrage: Was ist denn die Norm? sup der absoluten Funktionswerte
- Wie hängen denn die punktweise Konvergenz und die gleichmäßige Konvergenz zusammen, wenn sie an die ϵ-n_0-Schreibweise denken?
  - Cauchy-Kriterien genannt, Hinweis: Epsilon ist im Falle der gleichmäßigen Konvergenz nicht von den x abhängig. Hier hatte ich einen kleinen Fehler in der Formel, hatte im Falle der punktweisen Konvergenz das $\epsilon > 0$ vergessen. Prof. Boos hat mich darauf aufmerksam gemacht und ich habe es dann korrigiert.
- Was kann man denn mit der Konvergenz von solchen Funktionenfolgen und -reihen anfangen?
  - Definition neuer Funktionen wie bspw. Exponentialfunktion.
- Ja, was kann man denn noch damit machen? Denken Sie mal an die Eigenschaften der Grenzfunktion
  - Man kann bei glm. Konvergenz und dem Vorliegen bestimmter Eigenschaften der f_n die Eigenschaften der Grenzfunktion feststellen.
- Fällt Ihnen eine Funktionenfolge ein, die punktweise konvergiert und stetig ist, deren Grenzfunktion aber nicht stetig ist?
  - $f_n := x^n$ auf dem Intervall $[0; 1]$

- Welche Eigenschaften werden denn wann an die Grenzfunktion vererbt?
  - Beschränktheit (glm. Konv. + fast alle f_n beschränkt)
  - Stetigkeit (glm. Konv. + fast alle f_n stetig in a)
  - Integrierbarkeit (glm. Konv. + alle (!) f_n r-integrierbar)
  - Differenzierbarkeit (glm. Konv. der differenzierten Funktionen + $f_n(a)$ konvergiert für ein a + f_n definiert auf einem beschränkten Intervall I)
- Genau, dabei ist ja interessant, dass die ursprüngliche Folge nicht glm. konvergieren muss. Zeigen Sie bitte wie man die Differenzierbarkeit einer Potenzreihe beweisen kann.
  - Definition: Potenzreihe
- Eine Potenzreihe konvergiert ja trivialerweise stets in einem Punkt...
  - ...dem Entwicklungspunkt
- genau, was kann man noch zur Konvergenz sagen?
  - Konvergenzradius erläutert, Zwischenfrage: Welchen Wertebereich besitzt r? $0 \leq r \leq \infty$
  - Also, Differenzierbarkeit der Potenzreihe...für a konvergiert die Potenzreihe offensichtlich, also muss man nur noch die glm. Konvergenz der Reihe der gliedweise differenzierten Funktionen betrachten. Diese lautet: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$, diese Reihe besitzt ebenfalls den Konvergenzradius r, denn diese Reihe konvergiert genau dann, wenn $(x-a)\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ also wenn $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-a)^n$ konvergiert. Da $\sqrt[n]{|a_n|}$ und $\sqrt[n]{n|a_n|}$ die gleichen Verdichtungspunkte haben, stimmen auch ihre Konvergenzradien r überein. x ist grundsätzlich Element eines kompakten Teilintervalls von $]a-r; a+r[$, damit ist die Reihe der gliedweise differenzierten Funktionen gleichmäßig konvergent und der Satz über die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion liefert die Behauptung.
  - Prof. Boos grübelte während meines Beweises über das $n = 1$ in der Reihe und das fehlende a_0, ich habe dann gesagt, dass man am Ende ja die Reihe $\hat{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ rechnen kann (so steht es glaube ich im Skript:-)). Er meinte dann, es würde keinen großen Unterschied machen, da man dann eben zu zeigen hätte, dass $\sqrt[n+1]{n} \to 1$ strebt. An diesem Punkt habe ich verständnisvoll genickt und glücklicherweise wurde das Thema gewechselt:-)
- Wann besitzt denn eine Funktion bei k-maliger Differenzierbarkeit ein lokales Extremum?
  - f auf einer Umgebung von a k-mal differenzierbar, ersten (k-1)-Ableitungen in a gleich null, k-te Ableitung ungleich null.
- Dann wissen Sie aber noch nicht, dass ein Extremum vorliegt!...Eine Bedingung fehlt noch? Denken Sie an mal an k!
  - k muss gerade sein! (hatte ich doch glatt in der Aufregung vergessen...) Habe dann ohne Aufforderung mit dem Satz von Taylor den Beweis geliefert und gezeigt, dass man im Beweis eben schön sieht, dass k gerade sein muss.
- Springen wir zum Thema r-Integrierbarkeit. Dass Sie die Definition können nehme ich mal an, welche Klassen von Funktionen kennen Sie, die integrierbar sind?

- stetig und beschränkt
- stetig und D kompakt
- stetig und f monoton (hier habe ich einen dicken Fehler gemacht, richtig wäre monoton und beschränkt gewesen...Prof. Boos hat es verbessert und ich stand etwas auf der Leitung, habe den Fehler danach gleich nochmal gemacht bis es mir aufgefallen ist).

- Wie kann man das denn im Fall einer monotonen und beschränkten Funktion beweisen?
  - (diese Antwort habe ich exakt so gegeben, die folgende Antwort ist also nicht gekürzt! Sie reichte ihm vollkommen...) Ich beweise die r-Integrierbarkeit, indem ich Folgen von Treppenfunktionen definiere, die die Funktion von oben und von unten auf den Intervallen der Zerlegung einschließen. Diese Folgen besitzen dann schöne Eigenschaften, so dass ich die r-Integrierbarkeit zeigen kann. Habe zusätzlich die Zeichnung aus dem Skript skizziert. (hier passt wohl wirklich der Begriff BeweisIDEE oder BeweisSKIZZE, denn formal hätte ich den Beweis auf keinen Fall hinbekommen)
- Wie kann man das Integral $\int_0^{2\pi} e^x \cdot \sin x$ bestimmen?
  - Habe geantwortet, dass es in diesem Fall prinzipiell die partielle Integration und die Substitutionsregel gibt. Habe laut nachgedacht: part. Int. ermöglicht das Ableiten des einen Faktors und das Aufleiten des anderen Faktors. Prof. Boos meinte dann, dass ja e^x eine schöne Eigenschaft hat. Darauf antwortete ich, dass $(e^x)' = e^x$ gilt, also beim part. Integrieren e^x sich nicht verändert und man durch zweimaliges Anwenden der Regel von $\sin x$ über $\cos x$ wieder zu $-\sin x$ gelangt und man dann die Gleichung nur umstellen muss, um das Integral berechnen zu können.
- Woraus folgen denn diese Regeln?
  - Produktregel der Differenziation (part. Integrieren), Kettenregel (Substitutionsregel)
- Was besagt der Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung?
  - Satz wiedergegeben
  - f stetig auf einem beschränkten Intervall I
  - Beweis kurz angedeutet, dass nämlich die Stammfunktion als Integral $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ dargestellt werden kann, Eigenschaften von $F(x)$ erklärt, mit Hinweis dass bei einer global stetigen Funktion genau $F' = f$ gilt und gesagt, dass sich zwei Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante voneinander unterscheiden.

Ende

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:
Prof. Boos ist ein sehr freundlicher Prüfer. Ob man lieber einen Kurzvortrag halten möchte oder nicht, ist wahrscheinlich Geschmackssache. Er hat mir am Anfang sehr viel Freiraum zum antworten gelassen. Bei den Fragen von Prof. Boos weiß man stets, worauf er hinaus möchte. Sein Fragestil unterscheidet sich aber schon ein bisschen von dem von Prof. Unger. Er fragt weniger stakkatohaft die Sachen runter, sondern gibt kurze Einleitungen, gibt bereits Hinweise auf bestimmte Sachverhalte (siehe oben z.B. die punktweise Konvergenz). Was die Beweise angeht und den Fragenkatalog muss

ich indes sagen, dass er anscheinend nicht immer die gleichen Sachen abprüft. Im Nachhinein bin ich richtig überrascht angesichts des eher untypischen Prüfungsverlaufs (Zwischenwertsatz, Differenzierbarkeit, Mittelwertsätze kamen alle nicht dran, dafür der Beweis für die r-Integrierbarkeit monotoner beschränkter Funktionen). Ich kann daher nur jedem empfehlen sich wirklich alle Beweisskizzen anzuschauen. Kann man diese nennen braucht man denke ich auch nicht alle formalen Beweise und kann sich ein zwei Fehler leisten (ich hatte ganz klare Schwächen bei der r-Integrierbarkeit und kleine Hänger bei den Extrema und bei dem Beweis der Differenzierbarkeit einer Potenzreihe; ich vermute mal, dass meine anschließenden Beweise/Beweisskizzen das Ruder stets nochmal rumgerissen haben). Die Benotung war angesichts dessen sehr sehr fair.

Schließlich möchte ich noch betonen, dass dieses Protokoll sehr umfangreich und vollständig ist. Es ist knapp zwei Stunden nach der Prüfung entstanden und spiegelt sowohl den Umfang, den Ablauf der Prüfung als auch den Fragenstil von Prof. Boos meines Erachtens ziemlich genau wider.

Vielen Dank an alle, die nach ihrer Prüfung ein Protokoll geschrieben haben. Ein letzter Tip: Neben der Homepage der Fachschaft gibt es noch einige Protokolle bei der Fachschaft Informatik und den ruf-Homepages.